
BACHELORARBEIT

Herr
Jan Lässig

**Systematische Analyse und
Validierung von Test-Aufgaben für
multikriterielle
Optimierungsverfahren**

2016

Fakultät **Angewandte Computer- und
Biowissenschaften**

BACHELORARBEIT

Systematische Analyse und Validierung von Test-Aufgaben für multikriterielle Optimierungsverfahren

Autor:

Jan Lässig

Studiengang:

Angewandte Mathematik

Seminargruppe:

MA11w1-B

Erstprüfer:

Prof. Dr. rer. nat. Ullrich Griesbach

Zweitprüfer:

M.Sc. Dipl.-Math.(FH) Steffen Kux

Mittweida, Dezember 2016

Bibliografische Angaben

Lässig, Jan: Systematische Analyse und Validierung von Test-Aufgaben für multikriterielle Optimierungsverfahren, 137 Seiten, 95 Abbildungen, 82 Tabellen, Hochschule Mittweida, University of Applied Sciences, Fakultät Angewandte Computer- und Biowissenschaften

Bachelorarbeit, 2016

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt.

Satz: Diese Arbeit wurde mit LyX geschrieben und mit LaTeX formatiert.

Referat

Bei der Entwicklung von modernen Verbrennungsmotoren spielen Softwareanwendungen zur Berechnung und Simulation eine grundlegende Rolle. Mit Blick darauf, dass die Anforderungen stetig wachsen und die Entwicklungszeiten kürzer werden, wird der Einsatz von mathematischen Optimierungsverfahren immer wichtiger. Zum Test und zur Bewertung der Verfahren existiert eine Vielzahl von analytischen Testaufgaben. In dieser Arbeit werden Test-Aufgaben für die multikriterielle Optimierung vorgestellt und auf die Schwierigkeiten, die sie Optimierungsverfahren bereiten können, untersucht. Anschließend wird eine Auswahl der Test-Aufgaben ausführlich getestet und die Ergebnisse ausgewertet.

I. Inhaltsverzeichnis

Inhaltsverzeichnis	I
Abbildungsverzeichnis	II
Tabellenverzeichnis	III
Abkürzungsverzeichnis	1
1 Einleitung	1
2 Grundlagen	3
2.1 Klassifizierung von Optimierungsverfahren	4
2.1.1 Deterministische Verfahren (auch exakte Verfahren)	6
2.1.2 Stochastische Verfahren	6
3 Testprobleme	9
3.1 Eigenschaften von Testproblemen	9
3.1.1 Formen der Pareto-Front	9
3.1.2 Verzerrung	10
3.1.3 Multimodalität	12
3.1.4 Flache Bereiche (isoliertes Optimum)	13
3.1.5 Nebenbedingungen	14
3.2 ZDT Testsuite	18
3.3 DTLZ-Testsuite	22
3.4 Testprobleme mit Nebenbedingungen	27
3.5 Sonstige Aufgaben	31
3.5.1 Aufgaben mit flachen Bereichen	31
3.5.2 Aufgaben mit täuschenden lokalen Optima	32
4 Testen der Optimierungsverfahren	35
4.1 Kriterien für die Auswertung multikriterieller Optimierungsverfahren	35
4.1.1 Die Anzahl der Pareto-Punkte (PP)	36
4.1.2 Das Hypervolumen (HV)	36
4.1.3 Die Konvergenzmetrik (KM)	37
4.1.4 Die Relative Dominanz (RD)	38

4.2	ZDT-Testsuite	38
4.2.1	ZDT3	38
4.2.2	ZDT4	40
4.2.3	ZDT6	42
4.3	DTLZ-Testsuite	45
4.3.1	DTLZ1	45
4.3.1.1	DTLZ1 mit 3 Zielen und 6 Parametern	45
4.3.1.2	DTLZ1 mit 3 Zielen und 10 Parametern	48
4.3.1.3	DTLZ1 mit 5 Zielen und 7 Variablen	49
4.3.2	DTLZ2	50
4.3.3	DTLZ3	53
4.3.4	DTLZ4	56
4.3.5	DTLZ6	59
4.3.6	DTLZ7	63
4.4	Aufgaben mit Nebenbedingungen	67
4.4.1	C1-DTLZ1	67
4.4.2	C2-DTLZ2	70
4.4.3	C3-DTLZ1	73
4.4.4	C3-DTLZ4	76
4.5	Sonstige Aufgaben	79
4.5.1	flat-ZDT6	79
4.5.2	flat-DTLZ1	81
4.5.3	deceptive-ZDT3	84
4.5.4	deceptive-DTLZ1	86
5	Zusammenfassung und Ausblick	91
	Literaturverzeichnis	95
A	Tabellen für Testauswertung	97
A.1	ZDT3	97
A.2	ZDT4	99
A.3	ZDT6	101
A.4	DTLZ1	103

A.4.1	3 Ziele und 6 Parameter	103
A.4.2	3 Ziele und 10 Parameter	105
A.4.3	5 Ziele und 7 Parameter	107
A.5	DTLZ2	109
A.6	DTLZ3	111
A.7	DTLZ4	113
A.8	DTLZ6	115
A.9	DTLZ7	117
A.10	C1-DTLZ1	119
A.11	C2-DTLZ2	121
A.12	C3-DTLZ1	123
A.13	C3-DTLZ4	125
A.14	flat-ZDT6	127
A.15	flat-DTLZ1	129
A.16	deceptive-ZDT3	131
A.17	deceptive-DTLZ1	133
B	Parametrisierungen der Optimierungsverfahren	135
B.1	MCO	135
B.2	NSGA-II	135
B.3	Nelder-Mead	135
B.4	PSO	136
B.5	SMS-EMOA	136
B.6	SPEA2	136
B.7	PGA	136

II. Abbildungsverzeichnis

2.1	Pareto-Menge und Pareto-Front ZDT3	4
2.2	Überblick über Verfahrensklassen der Nichtlinearen Optimierung	5
3.1	Beispiel für Formen einer Pareto-Front	9
3.2	Ausschnitt Zielraum für $\alpha = \beta = 1$ (linke Seite) und für $\alpha = 1, \beta = 50$ (rechte Seite)..	11
3.3	Zielraum für $\alpha = 50, \beta = 1$ (linke Seite) Punkte der Pareto-Front (rechte Seite)	11
3.4	Beispielfunktion Täuschung	12
3.5	Beispielfunktion flache Bereiche	14
3.6	Ausschnitt Zielraum BspNB1	15
3.7	Ausschnitt Zielraum BspNB2	16
3.8	Ausschnitt Zielraum BspNB3	17
3.9	Ausschnitt Zielraum BspNB2	18
3.10	Eine Approximation der Pareto-Front für das ZDT1-Problem	19
3.11	Eine Approximation der Pareto-Front für das ZDT2-Problem	20
3.12	Eine Approximation der Pareto-Front für das ZDT3-Problem	20
3.13	Darstellung der Pareto-Front für das ZDT6-Problem	21
3.14	Eine Approximation der Pareto-Front für das DTLZ1-Problem für $M=3 N=6$	23
3.15	Eine Approximation der Pareto-Front für das DTLZ2-Problem für $M=3 N=5$	24
3.16	Eine Approximation der Pareto-Front für das DTLZ5-Problem für $M=3 N=5$	25
3.17	Eine Approximation der Pareto-Front für das DTLZ7-Problem für $M=3 N=5$	26
3.18	C1-DTLZ1-Zielbereich für $M=2$	28
3.19	C2-DTLZ2-Zielbereich für $M=2$	29
3.20	C3-DTLZ1-Zielbereich für $M=2$	30
3.21	C3-DTLZ4-Zielbereich für $M=2$	31
4.1	Beispiel Hypervolumen	37
4.2	ZDT3 Tortendiagramme	39
4.3	ZDT3-Ergebnis-Plots: SMS-EMOA(25) und SMS-EMOA(50)	40
4.4	ZDT3-Ergebnis-Plots: SPEA2(50) und PSO(50)	40
4.5	ZDT4 Tortendiagramme	41

4.6	ZDT4-Ergebnis-Plots PGA(50) und PGA(100,500)	42
4.7	ZDT4-Ergebnis-Plots NSGA-II(50) und SPEA2(50)	42
4.8	ZDT6 Tortendiagramme	43
4.9	ZDT6-Ergebnisse: PSO(25) und PSO(50)	44
4.10	ZDT6 Ergebnisse: SMS-EMOA(50) und SPEA2(50)	44
4.11	DTLZ1 Tortendiagramme	46
4.12	DTLZ1 Ergebnis-Plots : PGA(25)	47
4.13	DTLZ1 Ergebnis-Plots: PGA(50).....	47
4.14	DTLZ1 Ergebnis-Plots: NSGA 50	48
4.15	DTLZ1 Ergebnis-Plots: SMS-EMOA(50)	48
4.16	DTLZ1 M=3 N=10 Tortendiagramme	49
4.17	DTLZ1 M=5 N=7 Tortendiagramme	50
4.18	DTLZ2 Tortendiagramme	51
4.19	DTLZ2-Ergebnisse SMS-EMOA(50)	52
4.20	DTLZ2-Ergebnisse PGA(50)	52
4.21	DTLZ2-Ergebnisse NSGA-II(50)	53
4.22	DTLZ2-Ergebnisse SPEA2(50)	53
4.23	DTLZ3 Tortendiagramme	54
4.24	DTLZ3 Testergebnisse PGA(25)	55
4.25	DTLZ3 Testergebnisse PGA(50)	55
4.26	DTLZ3 Testergebnisse NSGA-II(50)	56
4.27	DTLZ3 Testergebnisse SMS-EMOA(50)	56
4.28	DTLZ4 Tortendiagramme	57
4.29	DTLZ4 Testergebnisse SMS-EMOA(25)	58
4.30	DTLZ4 Testergebnisse SMS-EMOA(50)	58
4.31	DTLZ4 Testergebnisse SPEA2(50)	59
4.32	DTLZ4 Testergebnisse PGA(50)	59
4.33	DTLZ6 Testergebnisse PGA(50)	60
4.34	DTLZ6 Tortendiagramme	61
4.35	DTLZ6 Testergebnisse PSO(25)	62
4.36	DTLZ6 Testergebnisse PSO(50)	62

4.37 DTLZ6 Testergebnisse SMS-EMOA(50)	63
4.38 DTLZ7 Tortendiagramme	64
4.39 DTLZ7 Testergebnisse PSO(25)	65
4.40 DTLZ7 Testergebnisse PSO(50)	65
4.41 DTLZ7 Testergebnisse SMS-EMOA(50)	66
4.42 DTLZ7 Testergebnisse SPEA2(50)	66
4.43 C1-DTLZ1 Tortendiagramme	68
4.44 C1-DTLZ1 TestergebnissePSO(50)	69
4.45 C1-DTLZ1 TestergebnissePGA(50)	69
4.46 C1-DTLZ1 TestergebnissePGA(25)	70
4.47 C2-DTLZ2 Tortendiagramme	71
4.48 C2-DTLZ2 Testergebnisse SMS-EMOA(25)	72
4.49 C2-DTLZ2 Testergebnisse SMS-EMOA(50)	72
4.50 C2-DTLZ2 Testergebnisse PGA(50)	73
4.51 C3-DTLZ1 Tortendiagramme	74
4.52 C3-DTLZ1 Testergebnisse PGA(25)	75
4.53 C3-DTLZ1 Testergebnisse PGA(50)	75
4.54 C3-DTLZ1 Testergebnisse NSGA-II(50)	76
4.55 C3-DTLZ4 Tortendiagramme	77
4.56 C3-DTLZ4 Ergebnisse SPEA2(50)	78
4.57 C3-DTLZ4 Ergebnisse PSO(50)	78
4.58 C3-DTLZ4 Ergebnisse PGA(50)	79
4.59 flat-ZDT6 Tortendiagramme	80
4.60 flat-ZDT6-Ergebnis-Plots: NSGA2(50) und PGA(50)	81
4.61 flat-ZDT6-Ergebnis-Plots: SMS-EMOA(50) und SPEA2(50)	81
4.62 flat-DTLZ1 Tortendiagramme	82
4.63 flat-DTLZ1-Ergebnis-Plots: PGA(50) Beispiel 1	83
4.64 flat-DTLZ1-Ergebnis-Plots: PGA(50) Beispiel 2	83
4.65 flat-DTLZ1-Ergebnis-Plots: SMS-EMOA(50)	84
4.66 deceptive-ZDT3 Tortendiagramme	85
4.67 deceptive-ZDT3-Ergebnis-Plots: NSGA-II(50) und PGA(50)	86

4.68	deceptive-ZDT3-Ergebnis-Plots: SMS-EMOA(50) und SPEA2(50)	86
4.69	deceptive-DTLZ1 Tortendiagramme	87
4.70	deceptive-DTLZ1-Ergebnis-Plots: SMS-EMOA(50)	88
4.71	deceptive-DTLZ1-Ergebnis-Plots: PGA(50)	88
4.72	deceptive-DTLZ1-Ergebnis-Plots: SPEA2(50)	89

III. Tabellenverzeichnis

3.1	Überblick der Eigenschaften der ZDT-Testprobleme	22
3.2	Überblick der Eigenschaften der DTLZ-Testprobleme	27
5.1	Ergebnisauswertung Hypervolumen	92
5.2	Ergebnisauswertung Konvergenzmetrik.....	92
5.3	Ergebnisauswertung Relative Dominanz.....	93
5.4	Ergebnisauswertung nach Eigenschaften.....	93
A.1	ZDT3-Ergebnisse: Anzahl der Pareto-Punkte	97
A.2	ZDT3-Ergebnisse: Hypervolumen zum Referenzpunkt (2, 7.38515)	97
A.3	ZDT3-Ergebnisse: Konvergenzmetrik	98
A.4	ZDT3-Ergebnisse: Relative Dominanz	98
A.5	ZDT4-Ergebnisse: Anzahl der Pareto-Punkte	99
A.6	ZDT4-Ergebnisse: Hypervolumen zum Referenzpunkt (1.998654, 159.221237)	99
A.7	ZDT4-Ergebnisse: Konvergenzmetrik	100
A.8	ZDT4-Ergebnisse: Relative Dominanz	100
A.9	ZDT6-Ergebnisse: Anzahl der Pareto-Punkte	101
A.10	ZDT6-Ergebnisse: Hypervolumen zum Referenzpunkt (2, 10.653553)	101
A.11	ZDT6-Ergebnisse: Konvergenzmetrik	102
A.12	ZDT6-Ergebnisse: Relative Dominanz	102
A.13	DTLZ1 Ergebnisse: Anzahl der Pareto-Punkte	103
A.14	DTLZ1 Ergebnisse: HV zum Referenzpunkte (450.059556, 383.251474, 451.5).....	103
A.15	DTLZ1 Ergebnisse: Konvergenzmetrik.....	104
A.16	DTLZ1 Ergebnisse: Relative Dominanz	104
A.17	DTLZ1 M=3 N=10 Ergebnisse: Anzahl der Pareto-Punkte	105
A.18	DTLZ1 M=3 N=10 Ergebnisse: HV zum Referenzpunkt (889.258, 665.213, 901.5) ...	105
A.19	DTLZ1M=3 N=10 Ergebnisse: Konvergenzmetrik	106
A.20	DTLZ1 M=3 N=10 Ergebnisse: Relative Dominanz	106
A.21	DTLZ1 M=5 N=7 Ergebnisse: Anzahl der Pareto-Punkte	107
A.22	DTLZ1 M=5 N=7 Ergebnisse: HV zum Referenzpunkt (339, 334, 322, 329, 339)	107

A.23	DTLZ1 M=5 N=7 Ergebnisse: Konvergenzmetrik	108
A.24	DTLZ1 M=5 N=7 Ergebnisse: Relative Dominanz	108
A.25	DTLZ2 Ergebnisse: Anzahl der Pareto-Punkte	109
A.26	DTLZ2 Ergebnisse: Hypervolumen zum Referenzpunkt (2.75, 2.575366, 2.75)	109
A.27	DTLZ2 Ergebnisse: Konvergenzmetrik	110
A.28	DTLZ2 Ergebnisse: Relative Dominanz	110
A.29	DTLZ3 Ergebnisse: Anzahl der Pareto-Punkte	111
A.30	DTLZ3 Ergebnisse: HV zum Referenzpunkt (677, 631.422454, 675.089307)	111
A.31	DTLZ3 Ergebnisse: Konvergenzmetrik	112
A.32	DTLZ3 Ergebnisse: Relative Dominanz	112
A.33	DTLZ4 Ergebnisse: Anzahl der Pareto-Punkte	113
A.34	DTLZ4 Ergebnisse: HV zum Referenzpunkt (2.722769, 2.689696, 2.740519)	113
A.35	DTLZ4 Ergebnisse: Konvergenzmetrik	114
A.36	DTLZ4 Ergebnisse: Relative Dominanz	114
A.37	DTLZ6 Ergebnisse: Anzahl der Pareto-Punkte	115
A.38	DTLZ6 Ergebnisse: HV zum Referenzpunkt (5.570989, 5.873627, 5.983967)	115
A.39	DTLZ6 Ergebnisse: Konvergenzmetrik	116
A.40	DTLZ6 Ergebnisse: Relative Dominanz	116
A.41	DTLZ7 Ergebnisse: Anzahl der Pareto-Punkte	117
A.42	DTLZ7 Ergebnisse: Hypervolumen zum Referenzpunkt (2, 2, 32.103289)	117
A.43	DTLZ7 Ergebnisse: Konvergenzmetrik	118
A.44	DTLZ7 Ergebnisse: Relative Dominanz	118
A.45	C1-DTLZ1-Ergebnisse: Anzahl der Pareto-Punkte	119
A.46	C1-DTLZ1-Ergebnisse: HV zum Referenzpunkt (1.47823, 1.49203, 1.59772)	119
A.47	C1-DTLZ1-Ergebnisse: Konvergenzmetrik	120
A.48	C1-DTLZ1-Ergebnisse: Relative Dominanz	120
A.49	C2-DTLZ2-Ergebnisse: Anzahl der Pareto-Punkte	121
A.50	C2-DTLZ2-Ergebnisse: HV zum Referenzpunkt (10.378906, 9.487546, 4.026926) ...	121
A.51	C2-DTLZ2-Ergebnisse: Konvergenzmetrik	122
A.52	C2-DTLZ2-Ergebnisse: Relative Dominanz	122
A.53	C3-DTLZ1-Ergebnisse: Anzahl der Pareto-Punkte	123

A.54	C3-DTLZ1-Ergebnisse: HV zum Referentpunkt (450.818144, 352.174972, 451.5)	123
A.55	C3-DTLZ1-Ergebnisse: Konvergenzmetrik.....	124
A.56	C3-DTLZ1-Ergebnisse:	124
A.57	C3-DTLZ4-Ergebnisse: Anzahl der Pareto-Punkte	125
A.58	C3-DTLZ4-Ergebnisse: HV zum Referenzpunkt (2.658299, 2.658222, 2.65827)	125
A.59	C3-DTLZ4-Ergebnisse: Konvergenzmetrik.....	126
A.60	C3-DTLZ4-Ergebnisse: Relative Dominanz.....	126
A.61	flat-ZDT6-Ergebnisse: Anzahl der Pareto-Punkte	127
A.62	flat-ZDT6-Ergebnisse: Hypervolumen zum Referenzpunkt (2, 4.980291)	127
A.63	flat-ZDT6-Ergebnisse: Konvergenzmetrik	128
A.64	flat-ZDT6-Ergebnisse: Relative Dominanz	128
A.65	flat-DTLZ1-Ergebnisse: Anzahl der Pareto-Punkte	129
A.66	flat-DTLZ1-Ergebnisse: zum Referenzpunkt (3, 3, 3)	129
A.67	flat-DTLZ1-Ergebnisse: Konvergenzmetrik	130
A.68	flat-DTLZ1-Ergebnisse: Relative Dominanz	130
A.69	deceptive-ZDT3-Ergebnisse: Anzahl der Pareto-Punkte	131
A.70	deceptive-ZDT3-Ergebnisse: HV zum Referenzpunkt(1.876876, 3.258019)	131
A.71	deceptive-ZDT3-Ergebnisse: Konvergenzmetrik.....	132
A.72	deceptive-ZDT3-Ergebnisse: Relative Dominanz.....	132
A.73	deceptive-DTLZ1-Ergebnisse: Anzahl der Pareto-Punkte.....	133
A.74	deceptive-DTLZ1-Ergebnisse: HV zum Referenzpunkt (2.131, 2.131, 2.131).....	133
A.75	deceptive-DTLZ1-Ergebnisse: Konvergenzmetrik	134
A.76	deceptive-DTLZ1-Ergebnisse: Relative Dominanz	134

1 Einleitung

Diese Bachelorarbeit zum Thema „Systematische Analyse und Validierung von Test-Aufgaben für multikriterielle Optimierungsverfahren“ entstand im Rahmen meines Bachelorstudiums an der Hochschule Mittweida in Zusammenarbeit mit der IAV GmbH, Stollberg.

Bei der Entwicklung von modernen Verbrennungsmotoren spielen Softwareanwendungen zur Berechnung und Simulation eine grundlegende Rolle. Mit Blick darauf, dass die Anforderungen stetig wachsen und die Entwicklungszeiten kürzer werden, wird der Einsatz von mathematischen Optimierungsverfahren immer wichtiger. Zum Test und zur Bewertung der Verfahren existiert eine Vielzahl von analytischen Testaufgaben.

Das Ziel dieser Arbeit besteht darin, aus der Literatur bekannte multikriterielle Testaufgaben zu untersuchen und ihre Eigenschaften festzustellen. Aus den vorgestellten Test-Problemen soll eine Auswahl getroffen werden, die möglichst viele Schwierigkeiten beinhaltet. Diese Auswahl wird anschließend mit den Optimierungsverfahren, welche bei der IAV zum Einsatz kommen, getestet und die daraus entstandenen Resultate gegenübergestellt und interpretiert.

Zunächst werden im 2. Kapitel die mathematischen Grundlagen der multikriteriellen Optimierung eingeführt und anschließend die in dieser Arbeit verwendeten Klassen von Optimierungsverfahren vorgestellt. Zu Beginn des 3. Kapitels werden Eigenschaften von Test-Problemen vorgestellt und erläutert, die eine Herausforderung für die multikriteriellen Optimierungsverfahren darstellen. In 3.2 und dem folgendem Abschnitt werden zwei Testsuiten aus der Literatur betrachtet, wobei die Eigenschaften der einzelnen Probleme hervorgehoben werden. Dabei handelt es sich bei der Ersten um ZDT-Testsuite, für Testprobleme mit zwei Zielen und bei der Zweiten um die DTLZ-Testsuite, bei der die Anzahl der Zielfunktionen frei wählbar ist. Im Anschluss wird eine Auswahl von Test-Aufgaben mit Nebenbedingungen betrachtet, die auf Test-Problemen der DTLZ-Testsuite basieren. Zum Schluss dieses Kapitels werden noch einige modifizierte Aufgaben der zuvor vorgestellten Testsuiten eingeführt, die Eigenschaften besitzen, die die bereits erwähnten Test-Probleme nicht abdeckten. Eine Auswahl der vorgestellten Test-Probleme wird in Kapitel 4 ausführlich durch die in Kapitel 2 erwähnten Optimierungsverfahren getestet. Die Testergebnisse werden für jede Testaufgabe verglichen und bewertet.

2 Grundlagen

Eine nichtlineare multikriterielle Optimierungsaufgabe (NLMOA), auch Vektoroptimierung genannt, mit M Zielfunktionen, K Nebenbedingungen und N Parametern, wobei $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_N)^T \in \mathbb{R}^N$

der Parametervektor genannt wird und $f(\vec{x}) = (f_1(\vec{x}), f_2(\vec{x}), \dots, f_M(\vec{x}))$ der Zielvektor. Die NLMOA kann wie folgt dargestellt werden:

$$\left\{ \begin{array}{ll} f_m(\vec{x}) \rightarrow \min & m = 1, 2, \dots, M \\ c_k(\vec{x}) \geq 0 & k = 1, 2, \dots, K \\ x_i^{(U)} \leq x_i \leq x_i^{(O)} & i = 1, 2, \dots, N \\ \vec{x} \in \mathbb{R}^N & \end{array} \right.$$

Dabei sind $M, K, N \in \mathbb{N}$. Für $M = 1$ erhält man eine nichtlineare einkriterielle Optimierungsaufgabe. In dieser Arbeit wird nur von der Minimierung ausgegangen, da man das Problem $f(\vec{x}) \rightarrow \max$ in $-f(\vec{x}) \rightarrow \min$ umwandeln kann. Ebenso werden nur Ungleichungsnebenbedingungen betrachtet, da jede Gleichung $h(\vec{x}) = 0$ durch zwei Ungleichungen ersetzt werden kann: $(h(\vec{x}) \leq 0) \wedge (h(\vec{x}) \geq 0)$.

Die Werte, die der Parameter x_i annehmen darf, liegen zwischen der unteren Grenze $x_i^{(U)}$ und der oberen Grenze $x_i^{(O)}$. Der zulässige Bereich X wird wie folgt definiert:

$$X = \{x \in \mathbb{R}^N \mid (c_k(\vec{x}) \geq 0 \quad k = 1, \dots, K) \wedge (x_i^{(U)} \leq x_i \leq x_i^{(O)}), \quad i = 1, \dots, N\}$$

Bei der multikriteriellen Optimierung hat man meist mehrere widersprüchliche Ziele. Deshalb existieren bei den meisten multikriteriellen Optimierungsaufgaben mehrere Lösungen (auch Kompromisse genannt). Diese Lösungen werden mithilfe der Dominanz verglichen.

Ein Vektor $\vec{x}_1 \in X$ dominiert einen Vektor $\vec{x}_2 \in X$ (auch $\vec{x}_1 \prec \vec{x}_2$ geschrieben), wenn gilt:

$$\begin{aligned} \forall m \in \{1, 2, \dots, M\} : f_m(\vec{x}_1) &\leq f_m(\vec{x}_2) \\ \exists l \in \{1, 2, \dots, M\} : f_l(\vec{x}_1) &< f_l(\vec{x}_2) \end{aligned}$$

Ein Parametervektor \vec{x} wird als nicht dominiert bezüglich der Menge $Y \subseteq X$ bezeichnet, genau dann, wenn: $\nexists \vec{y} \in Y : \vec{y} \prec \vec{x}$ gilt.

Die Menge aller Vektoren $\vec{x} \in X$, die nicht dominiert werden, heißt Pareto-Menge und wird in dieser Arbeit mit P bezeichnet.

Die Menge der zugehörigen Zielvektoren:

$$F^* = \{f(\vec{x}) = (f_1(\vec{x}), \dots, f_M(\vec{x})) \in \mathbb{R}^N | \vec{x} \in P\}$$

wird Pareto-Front genannt und mit PF abgekürzt.

ZDT3 mit 2 Parametern

$$\begin{aligned} f_1 &= x_1 \rightarrow \min & x_1, x_2 &\in [0, 1] \\ f_2 &= h(x_1, x_2) \cdot g(x_2) \rightarrow \min \\ h &= 1 - \sqrt{\frac{x_1}{g}} - \left(\frac{x_1}{g}\right) \sin(10\pi \cdot x_1) \\ g &= 1 + 9x_2 \end{aligned}$$

In der Abbildung 2.1 wird die Pareto-Menge P auf der linken Seite mit grün dargestellt. Der zulässige Bereich X ist für dieses Beispiel $x_i \in [0, 1] \quad i = 1, 2$. Die Pareto-Front F^* wird auf der rechten Seite mit rot gekennzeichnet.

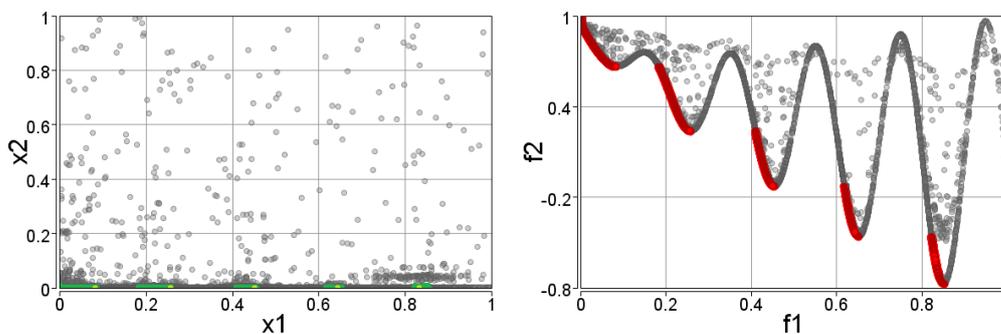


Abbildung 2.1: Pareto-Menge und Pareto-Front ZDT3

2.1 Klassifizierung von Optimierungsverfahren

In der Abbildung 2.2 ist ein Überblick über Verfahrensklassen der Nichtlinearen Optimierung dargestellt. Die in dieser Arbeit verwendeten Verfahrensklassen werden in den nächsten 2 Abschnitten und ausführlicher in [12] beschrieben.

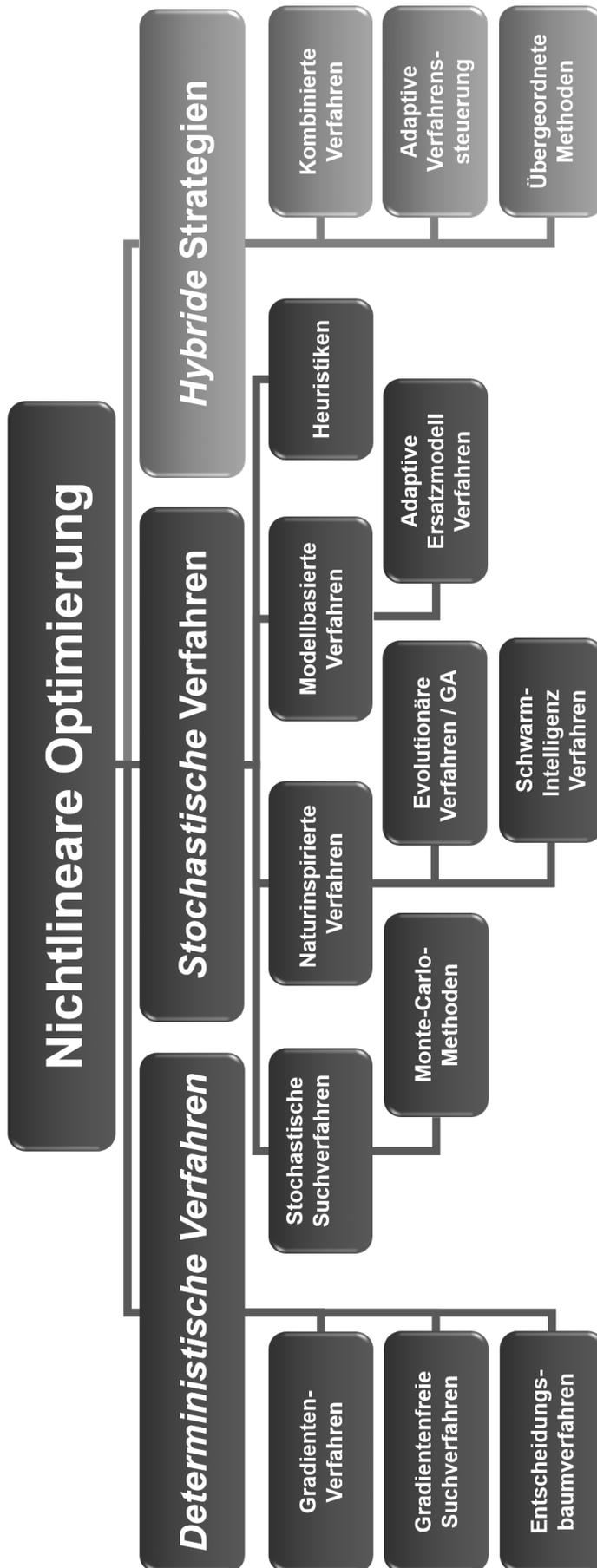


Abbildung 2.2: Überblick über Verfahrensklassen der Nichtlinearen Optimierung

2.1.1 Deterministische Verfahren (auch exakte Verfahren)

Bei Deterministischen Verfahren handelt es sich meist um einkriterielle Verfahren. Da Deterministische Verfahren einem klaren algorithmischen Ablauf folgen und keine Heuristiken verwenden oder vom Zufall abhängen, sind sie bei einer gleichen Ausgangssituation reproduzierbar.

Gradientenfreie Suchverfahren

Für Probleme, die nicht differenzierbare Zielfunktionen besitzen oder für die die Berechnung des Gradienten einen enormen rechnerischen Aufwand darstellt, sind gradientenfreie Suchverfahren von Vorteil. Zu diesen Verfahren zählt auch das Nelder-Mead-Verfahren, welches auch als Downhill-Simplex bekannt ist. Da es sich beim Nelder-Mead-Verfahren aber um ein einkriterielles lokales Verfahren handelt, wird es in dieser Arbeit als Referenzverfahren verwendet. In den Quellen [1] und [12] wird das Nelder-Mead-Verfahren beschrieben, zusätzlich wird in der letztgenannten Quelle auch der Pareto-Scan eingeführt. Durch den Pareto-Scan sind mit dem Nelder-Mead-Verfahren auch multikriterielle Aufgaben lösbar.

2.1.2 Stochastische Verfahren

Stochastische Verfahren hängen, anders als bei deterministischen Verfahren vom Zufall ab. Oft werden bei dieser Klasse von Verfahren Heuristiken eingesetzt, die die Art der Veränderung und Auswahl der Parameter steuern. Konvergenzaussagen für diese Art von Verfahren sind meist schwer oder auch gar nicht zu treffen. Ein Beispiel für ein stochastisches Suchverfahren ist die Monte-Carlo-Optimierung (MCO). Bei der MCO werden die Parameter im zulässigen Bereich ausgewürfelt. Eine genauere Beschreibung der Monte-Carlo-Optimierung ist in [12] zu finden. In dieser Arbeit wird MCO als Referenzverfahren genutzt.

Naturinspirierte Verfahren

Bei naturinspirierten Verfahren werden Vorgänge aus der Biologie oder Physik nachgebildet. Zu dieser Art Verfahren gehören unter anderem die Genetischen Algorithmen und Schwarmintelligenz-Verfahren.

Genetische Algorithmen Anstatt mit nur einem Parametervektor zu arbeiten, wird bei Genetischen Algorithmen mit mehreren Vektoren, den sogenannten Individuen gearbeitet, die zusammen die Population darstellen. Die Iterationen werden bei diesem Verfahren als Generationen bezeichnet. Bei vielen Verfahren werden mittels einer Selektion-

Methode die besten Individuen ausgewählt, die sich dann durch Kreuzung miteinander vermischen. Anschließend können die aus der Kreuzung entstandenen Individuen mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit zufällig verändert werden, was als Mutation bezeichnet wird. Die Population der nächsten Generation wird dann aus den besten Individuen der Kind- und Elternpopulation erstellt. Diese Vorgehensweise ist nur ein Beispiel und trifft nicht auf alle Genetischen Algorithmen zu. In dieser Arbeit werden mehrere genetische Algorithmen verwendet: NSGA-II siehe [3] und [13], SPEA2 siehe [18] und [13], SMS-EMOA [13], PGA in [16] der in dieser Quelle mit MrBOA bezeichnet wird.

Schwarmintelligenz-Verfahren Schwarmintelligenz-Verfahren sind dem Verhalten von Tierschwärmen nachempfunden. Wie bei Genetischen Algorithmen wird bei dieser Art von Verfahren mit einer Population gearbeitet. Die Partikel-Schwarm-Optimierung (PSO) ist ein Schwarmintelligenz-Verfahren und wird in [12] und [14] genauer beschrieben.

3 Testprobleme

3.1 Eigenschaften von Testproblemen

Da es bei der multikriteriellen Optimierung mehrere Lösungen gibt, ist es nicht nur wichtig, zur Pareto-Front zu konvergieren, sondern auch möglichst viele verschiedene pareto-optimale Lösungen zu finden. Es gibt Eigenschaften von Testproblemen, die sich auf die Konvergenz auswirken und andere, welche die Diversität der Lösungen beeinflussen.

3.1.1 Formen der Pareto-Front

Die Pareto-Front kann unterschiedlichste Formen haben. Manche davon werden in diesem Abschnitt genauer betrachtet. Die Formen der Pareto-Front hat vor allem auf das Finden vieler verschiedener pareto-optimaler Lösungen Einfluss.

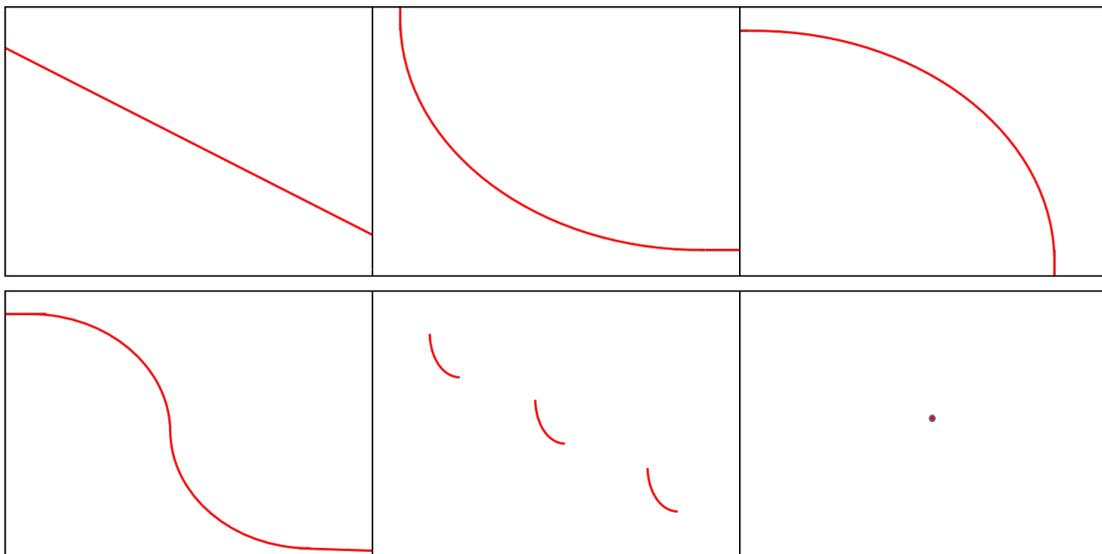


Abbildung 3.1: Beispiel für Formen einer Pareto-Front

Auf Abbildung 3.1 sind mehrere Arten von Formen vertreten, die eine Pareto-Front annehmen kann. Diese werden in der folgenden Liste aufgeführt und gegebenenfalls erläutert:

- lineare Pareto-Front - die Pareto-Front ist eine lineare Funktion und somit konkav und konvex (Abbildung 3.1 links oben),
- Konvexität der Pareto-Front (Abbildung 3.1 zentral oben),

- Konkavität der Pareto-Front (Abbildung 3.1 rechts oben),
- gemischte Pareto-Front - die Pareto-Front besteht aus konkaven und konvexen Teilen (Abbildung 3.1 links unten),
- nicht zusammenhängende Pareto-Front (unterbrochen) - die Pareto-Front besteht aus mehreren Teilen, die nicht zusammenhängen (Abbildung 3.1 zentral unten),
- entartete Pareto-Front- die Dimension des Bildbereiches der Pareto-Front ist kleiner gleich der Anzahl der Ziele-1 (Abbildung 3.1 rechts unten).

Nun werden die Probleme beschrieben, die eine spezielle Form der Pareto-Front einem Optimierungsverfahren bereiten kann. Bei manchen Optimierungsverfahren kann es bei einer konvexen Pareto-Front dazu kommen, dass mehr dazwischenliegende Lösungen als Lösungen am Rand gefunden werden. Dieses Verhalten kann bei genetischen Algorithmen auftreten, die für die Fitnesszuweisung die Anzahl der von einer Lösung dominierten Lösungen verwenden. Dieses Verhalten wird in [6] genauer beschrieben.

Eine nicht zusammenhängende Pareto-Front erschwert es dem Optimierungsverfahren, alle Bereiche der Pareto-Front zu finden. Dies geschieht durch den Wettbewerb der Lösungen untereinander, der zur Auslöschung mancher Teilbereiche führen kann (siehe [6]).

Eine entartete Pareto-Front kann manchen Optimierungsverfahren Probleme bereiten. Wenn die Dimension der Pareto-Front kleiner ist als erwartet, können durch die Methoden zur Aufrechterhaltung einer gleichmäßigen Ausbreitung an Lösungen Probleme entstehen (siehe [10]).

3.1.2 Verzerrung

Bei der Verzerrung¹ (im englischen Bias) sind die möglichen Lösungen im Zielraum in manchen Bereichen häufiger vertreten als in Anderen. Dabei kann Verzerrung die Konvergenz eines Optimierungsverfahren beeinflussen, wenn in der Pareto-Front weniger mögliche Lösungen existieren als in anderen Bereichen des Zielraumes. Es ist aber auch möglich, dass sich die Verzerrung auf die Diversität der Lösungen auswirkt. Dies ist der Fall, wenn in einigen Bereichen der Pareto-Front weniger Lösungen als in anderen Bereichen sind. Beide Eigenschaften werden im folgenden Beispiel verdeutlicht.

Bsp-Verzerrung

$$\begin{aligned} f_1 &= 2 - x_1^\alpha \rightarrow \min & x_1, x_2 &\in [0, 1] \\ f_2 &= -(2 - x_1^\alpha)(x_2^\beta + 1) \rightarrow \min & \alpha = \beta &= 1 \end{aligned}$$

¹ siehe [6] und [10]

Auf der linken Seite der Abbildung 3.2 sieht man einen Ausschnitt des Zielraumes dieser Aufgabe mit 10000 zufälligen Parametervektoren, die Pareto-Front ist die Gerade vom Punkt $(1, -2)$ zum Punkt $(2, -4)$. Nun wird Verzerrung in diese Aufgabe integriert, indem der Parameter $\beta = 50$ gesetzt wird. Die Auswirkungen werden in Abbildung 3.2 auf der rechten Seite dargestellt. Um die Gerade von Punkt $(1, -1)$ zu Punkt $(2, -2)$ sind jetzt wesentlich mehr Lösungen zu finden als in jedem anderen Bereich des Zielraumes. Es würde schwieriger (einfacher) werden, Lösungen nahe der Pareto-Front zu finden, wenn man ein größeres (kleineres) β wählen würde.

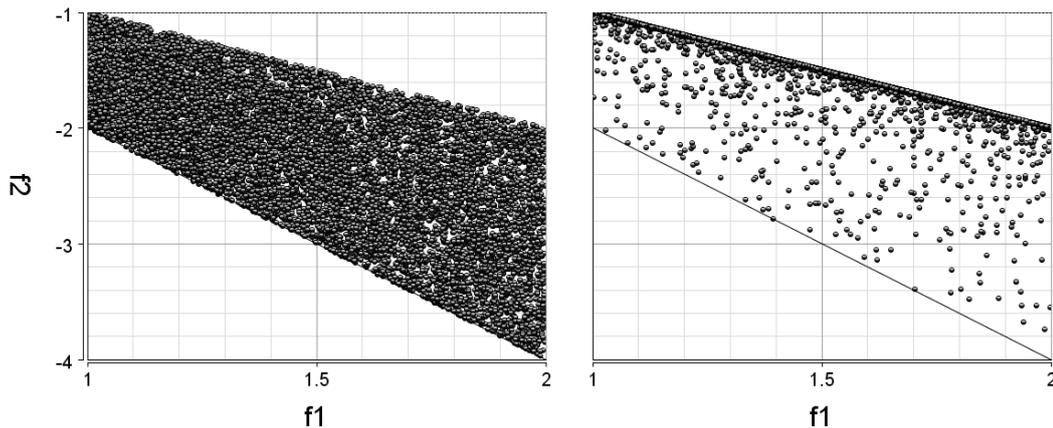


Abbildung 3.2: Ausschnitt Zielraum für $\alpha = \beta = 1$ (linke Seite) und für $\alpha = 1, \beta = 50$ (rechte Seite)

Als Nächstes wird die Verzerrung in der Pareto-Front verdeutlicht. Dafür werden die Parameter $\alpha = 50$ und $\beta = 1$ gesetzt. Dadurch sind im Bereich für $(f_1 \approx 2) \wedge (f_2 \approx -4)$ wesentlich mehr Punkte zu finden als in anderen Bereichen der Pareto-Front. Dieses Verhalten wird in Abbildung 3.3 auf der linken Seite dargestellt. Auf der rechten Seite der Abbildung 3.3 wurden 100 gleichmäßig verteilte Punkte der Pareto-Front für $x_1 \in [0.8, 1], x_2 \in [0.97525, 1]$ geplottet.

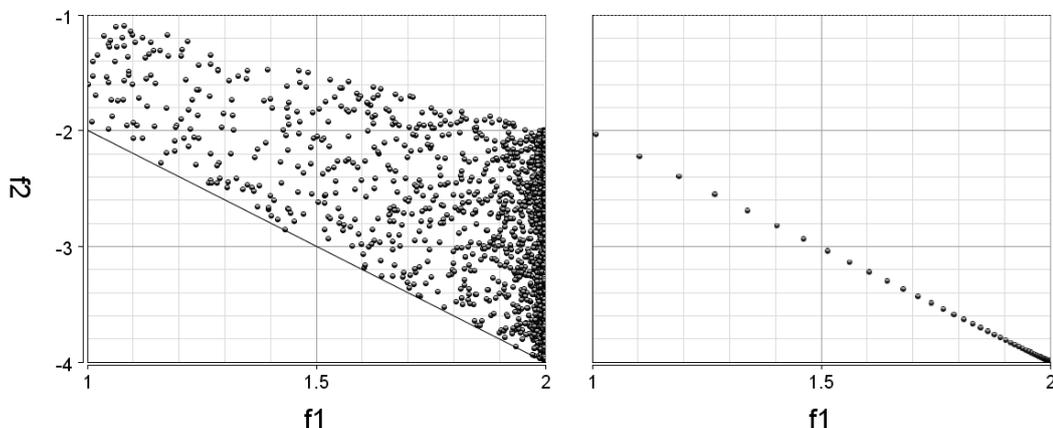


Abbildung 3.3: Zielraum für $\alpha = 50, \beta = 1$ (linke Seite) Punkte der Pareto-Front (rechte Seite)

3.1.3 Multimodalität

Eine NLMOA ist multimodal², wenn sie mehrere lokale Optima besitzt. Eine NLMOA mit nur einem Optimum nennt man unimodal. Die Schwierigkeiten der Multimodalität kommt durch die große Anzahl lokaler Optima zustande, in denen das Optimierungsverfahren feststecken bleiben kann. Die Multimodalität hat somit Einfluss auf die Konvergenz zur globalen Pareto-Front.

Täuschung (täuschende lokale Optima)

Täuschende lokale Optima sind ein Spezialfall der Multimodalität. Dabei wird versucht, das Optimierungsverfahren zu einem täuschenden lokalen Minimum zu locken. Für Täuschung müssen mindestens 2 Optima vorhanden sein, ein globales und ein lokales. Dabei favorisiert der Großteil des Parameterraums das lokale Minimum. Ein Beispiel für ein Problem mit einem täuschenden Optimum wäre (3.1), welches in Abbildung 3.4 dargestellt wird.

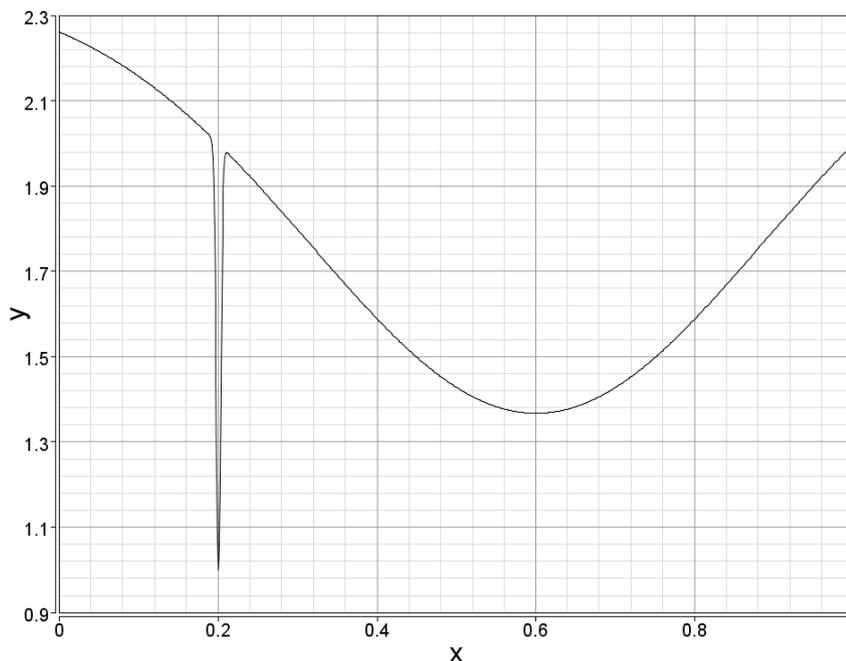


Abbildung 3.4: Beispielfunktion Täuschung

² siehe [6] und [10]

Bsp-deceptive³

$$\begin{aligned}
 y(x) &= 2 + e^{-1} - e^{-\left(\frac{x-0.2}{0.004}\right)^2} - e^{-\left(\frac{x-0.6}{0.4}\right)^2} \\
 x &\in [0, 1]
 \end{aligned}
 \tag{3.1}$$

3.1.4 Flache Bereiche (isoliertes Optimum)

Flache Bereiche⁴ kommen zustande, wenn eine zusammenhängende offene Teilmenge des Parameterraums auf denselben Zielvektor abgebildet wird. Es wird für ein Optimierungsverfahren schwierig, wenn das globale Optimum von flachen Bereichen umgeben ist, denn flache Bereiche liefern wenig Informationen über die genau Lage des Optimums. Im folgenden Beispiel wird diese Verhalten verdeutlicht.

Bsp-flat

$$\begin{aligned}
 y(x) &= \begin{cases} 4, & \text{für } x \leq 0.7 \\ -30x + 25, & \text{für } 0.7 \leq x \leq 0.8 \\ 30x - 23, & \text{für } 0.8 \leq x \leq 0.9 \\ 4, & \text{für } x \geq 0.9 \end{cases} \\
 x &\in [-5, 5]
 \end{aligned}
 \tag{3.2}$$

Das Minimum befindet sich im Bereich $0.7 \leq x \leq 0.9$, der restliche Definitionsbereich ist flach. Dieses Beispiel wird auf Abbildung 3.5 dargestellt.

³ Diese Funktion wurde aus [6] entnommen und geringfügig verändert, damit das globale Minimum den Funktionswert 1 hat.

⁴ siehe [6] und [10]

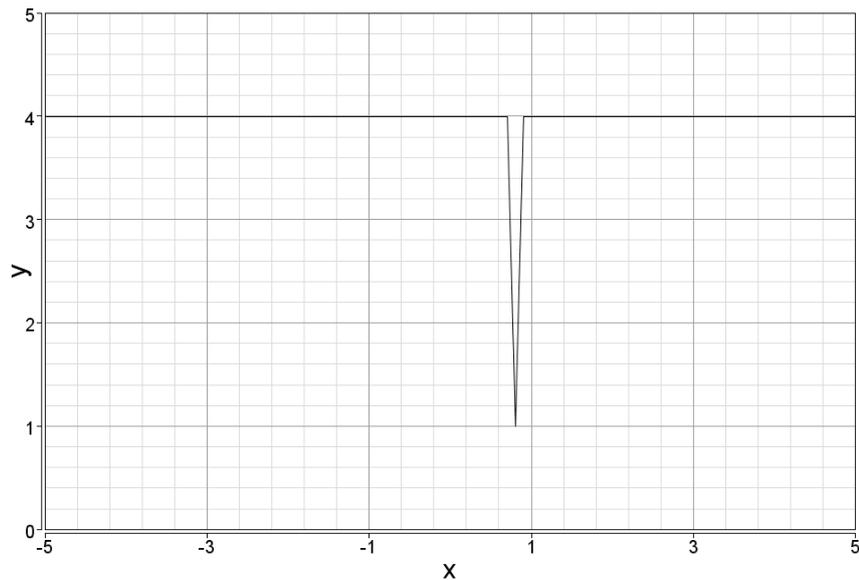


Abbildung 3.5: Beispielfunktion flache Bereiche

3.1.5 Nebenbedingungen

Durch das Hinzufügen von Nebenbedingungen kann ein gegebenes Problem noch erweitert werden⁵. In dieser Arbeit wird zwischen zwei Problemklassen unterschieden. Die erste Klasse besteht aus Aufgaben, bei denen durch die Nebenbedingungen die Pareto-Front des ursprünglichen Problems verändert wird. Zu dieser Klasse zählen unter anderen Aufgaben, bei denen Teile der Pareto-Front unzulässig werden oder die gesamte ursprüngliche Pareto-Front nicht mehr zulässig ist und so die neue Pareto-Front auf den Nebenbedingungen liegt. Die zweite Klasse von Problemen sind Aufgaben, bei denen die Nebenbedingungen den Zielbereich einschränken, dabei aber die Pareto-Front die gleiche wie beim Problem ohne Nebenbedingungen bleibt.

Die Schwierigkeiten werden an dem Beispiel Bsp-NB verdeutlicht, indem durch das Hinzufügen von Nebenbedingungen die Problemklassen aufgezeigt werden.

Bsp-NB

$$\begin{aligned} f_1 &= x_1 \rightarrow \min \\ f_2 &= (1 - x_1) \cdot g \rightarrow \min \\ x_1 &\in [0, 1] \end{aligned}$$

Die Pareto-Front dieser Aufgabe ist die Gerade vom Punkt (0,1) zum Punkt(1,0).

⁵ siehe [4]

Bsp-NB1

$$\begin{aligned}
 f_1 &= x_1 \rightarrow \min \\
 f_2 &= 1 - x_1 \rightarrow \min \\
 x_1 &\in [0, 1] \\
 c &= f_2 - x_1
 \end{aligned}$$

Für dieses Beispiel wurde $g = 1$ gewählt, außerdem wird durch die Nebenbedingung c ein Teil der Pareto-Front von Bsp-NB unzulässig. Die neue Pareto-Front wird in der Abbildung 3.6 dargestellt, wobei der unzulässige Bereich der durch die Nebenbedingung c zustande kommt, rot schraffiert ist und die Pareto-Front durch die schwarze Gerade gekennzeichnet wird.

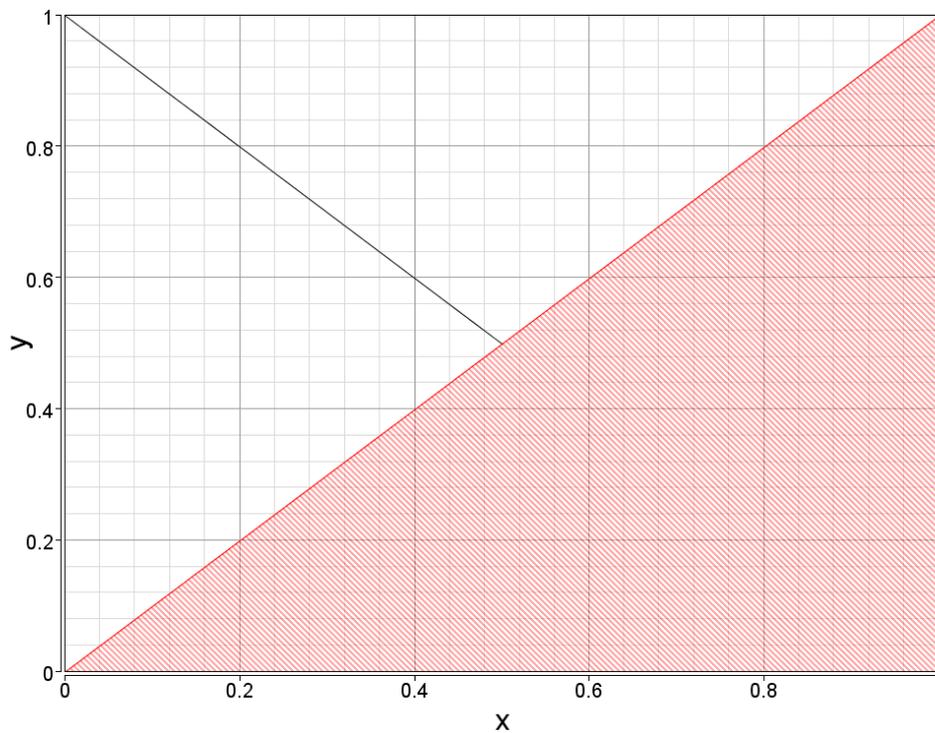


Abbildung 3.6: Ausschnitt Zielraum BspNB1

Bsp-NB2

$$\begin{aligned}
 f_1 &= x_1 \rightarrow \min \\
 f_2 &= 1 - x_1 \rightarrow \min \\
 x_1 &\in [0, 1] \\
 c &= f_2 - (1 - x_1)4\sin(x_1 \cdot 6\pi)
 \end{aligned}$$

Bei Bsp-NB2 wurde die Nebenbedingung aus Bsp-NB1 geändert, dadurch ist die Pareto-Front dieses Problems nicht zusammenhängend. Die Abbildung 3.7 stellt den Zielbereich der des Bsp-NB2 dar.

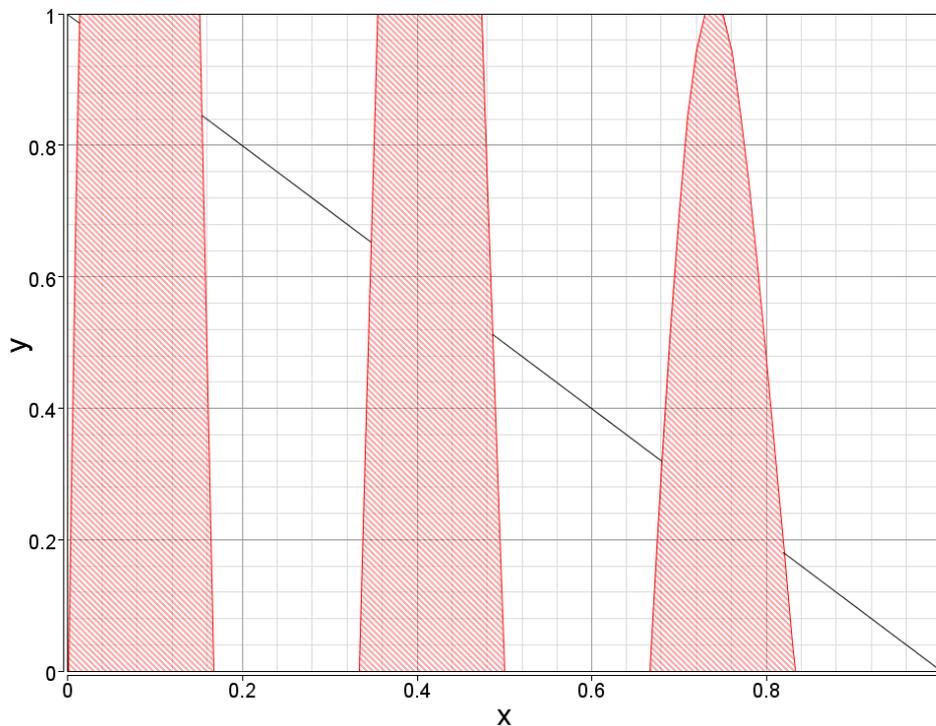


Abbildung 3.7: Ausschnitt Zielraum BspNB2

Bsp-NB3

$$\begin{aligned}
 f_1 &= x_1 \rightarrow \min \\
 f_2 &= (1 - x_1) \cdot g \rightarrow \min \\
 x_1 &\in [0, 1] \\
 g &= 1 + 10(x_1 - 0.5)^2 \\
 c_1 &= f_2 - x_1 \\
 c_2 &= f_2 + 1.2x_1 - 1.2 \geq 0
 \end{aligned}$$

Bei diesem Problem ist die 1. Nebenbedingung c_1 dieselbe wie c aus Bsp-NB1, jedoch gibt es zusätzlich die Nebenbedingung c_2 . Bei dieser Aufgabe ist die Funktion g nicht konstant. Die Pareto-Front des ursprünglichen Beispiels Bsp-NB ist bei dieser Aufgabe nicht mehr zulässig und die neue Pareto-Front liegt auf einem Teil der Nebenbedingung $c_2 = 0$. Ein Ausschnitt des Zielbereiches befindet sich in der Abbildung 3.8, wobei die Pareto-Front schwarz schraffiert dargestellt wird.

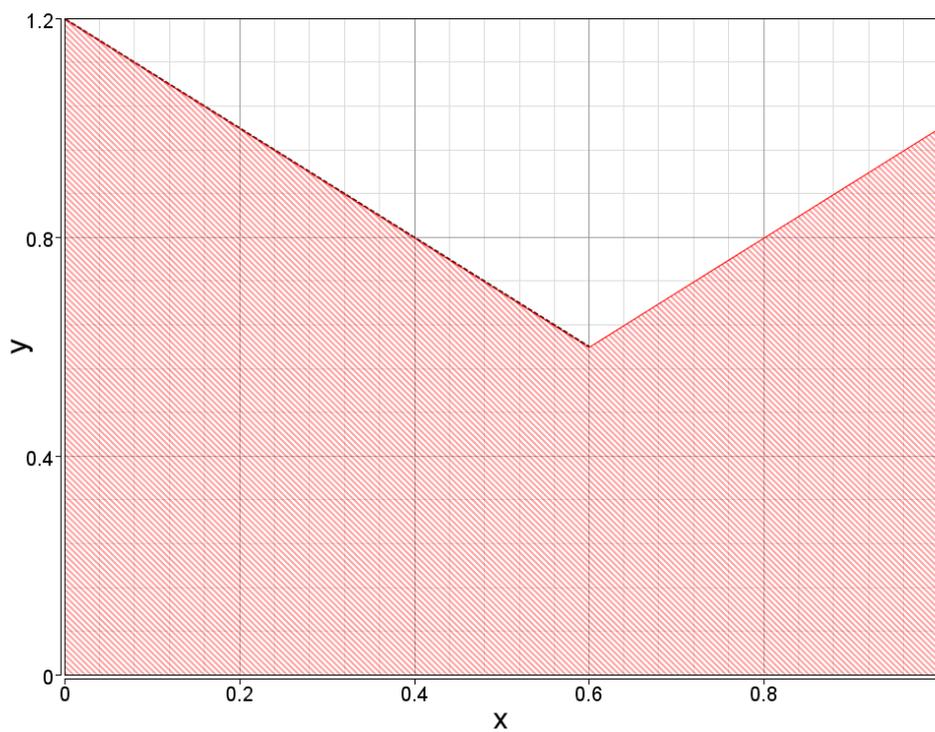


Abbildung 3.8: Ausschnitt Zielraum BspNB3

Bsp-NB4

$$\begin{aligned}f_1 &= x_1 \rightarrow \min \\f_2 &= (1 - x_1) \cdot g \rightarrow \min \\x_1 &\in [0, 1] \\g &= 1 + 10(x_1 - 0.5)^2 \\c &= f_2 + x_1 - 1.2 \geq 0\end{aligned}$$

Während bei den vorherigen Aufgaben Teile der Pareto-Front der Ursprungsaufgabe unzulässig waren, ist bei diesem Problem die ursprüngliche Pareto-Front unverändert. Ein Ausschnitt des Zielbereiches befindet sich in Abbildung 3.9.

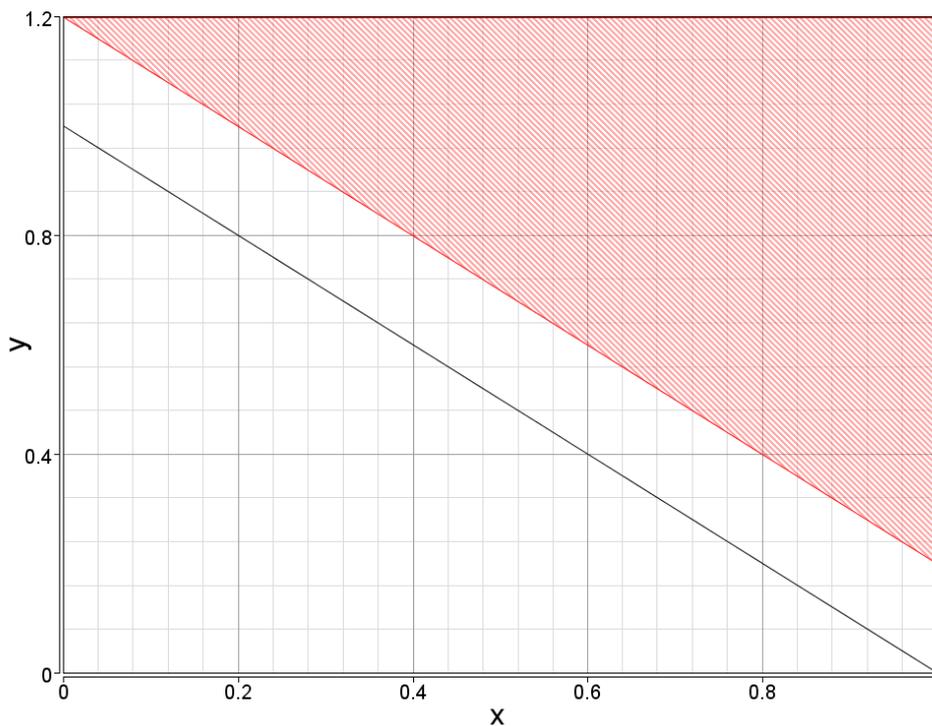


Abbildung 3.9: Ausschnitt Zielraum BspNB2

3.2 ZDT Testsuite

Es wurden in der Literatur mehrere Testsuiten zusammengestellt, die möglichst viele Schwierigkeiten abdecken sollen. In dieser Arbeit werden die ZDT-Testsuite und die DTLZ-Testsuite vorgestellt und zusammengefasst. Die ZDT Testsuite wurde von Zitzler, Deb und Thiele entwickelt, von denen sich auch die Namensgebung ZDT ableitet (siehe [17]). Diese Testsuite beruht auf Debs Toolbox, die in [6] genauer beschrieben wurde. Die Test-Probleme der ZDT-Testsuite haben die folgende Struktur:

$$\begin{aligned}
 f_1(x_1) &\rightarrow \min \\
 f_2(x_1, \dots, x_N) &\rightarrow \min \\
 f_2 &= g(x_2, \dots, x_N) \cdot h(f_1(x_1), g(x_2, \dots, x_N)) \\
 x &= (x_1, \dots, x_N)
 \end{aligned}$$

Ein Testproblem dieser Testsuite hat 2 Zielfunktionen, jedoch ist die Anzahl der Parameter frei wählbar, wobei $N > 1$ sein muss. Die erste Zielfunktion hängt nur von dem ersten Parameter ab und beeinflusst die Diversität der Lösungen.

Die zweite Zielfunktion hängt von allen Parametern ab und ist das Produkt der beiden Funktionen h und g . Die Funktion g hängt von allen außer dem ersten Parameter ab und beeinflusst die Art der Multimodalität und die Anzahl der lokalen Optima des Testproblems. Die Pareto-Front eines Testproblems dieser Testsuite kommt für $g = 1$ zustande. Die Funktion h hängt von g und f_1 und damit von allen Parametern ab. Durch h wird die Form der Pareto-Front beeinflusst.

ZDT1:

$$\begin{aligned} f_1 &= x_1 & x_i &\in [0, 1], i = 1, 2, \dots, N \\ g &= 1 + 9 \sum_{i=2}^k \frac{x_i}{N-1} \\ h &= 1 - \sqrt{\frac{f_1}{g}} \end{aligned}$$

Das erste Problem ZDT1 hat eine konvexe Kurve als Pareto-Front, da die Funktion h ebenfalls konvex ist. In Abbildung 3.10 wird die Pareto-Front der Aufgabe ZDT1 dargestellt. Die Schwierigkeit dieses Problems ist es, Lösungen auf der gesamten Pareto-Front zu finden, was durch ihre konvexe Form erschwert werden könnte, siehe Abschnitt 3.1.1.

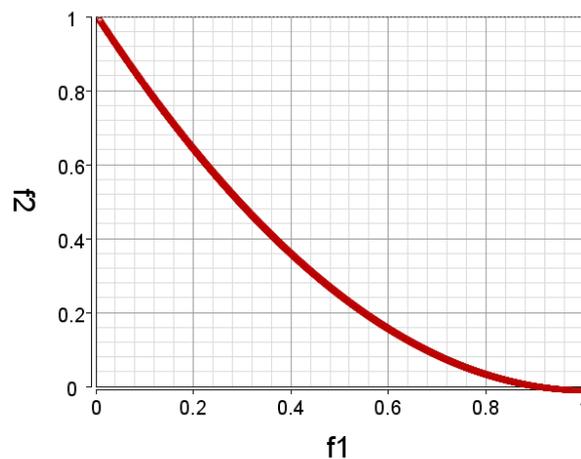


Abbildung 3.10: Eine Approximation der Pareto-Front für das ZDT1-Problem

ZDT2:

$$\begin{aligned} f_1 &= x_1 & x_i &\in [0, 1], i = 1, 2, \dots, N \\ g &= 1 + 9 \sum_{i=2}^k \frac{x_i}{N-1} \\ h &= 1 - \left(\frac{f_1}{g}\right)^2 \end{aligned}$$

ZDT2 unterscheidet sich von ZDT1 nur aufgrund der h -Funktion. Durch die Änderung des Exponenten des Termes $\frac{f_1}{g}$ auf 2 kommt eine konkave Pareto-Front zustande, wie in

Abbildung 3.11 zu sehen ist. Die Herausforderung, die dieses Problem an ein Optimierungsverfahren stellt, ist eine gleichmäßige Ausbreitung von Lösungen auf der Pareto-Front zu ermitteln.

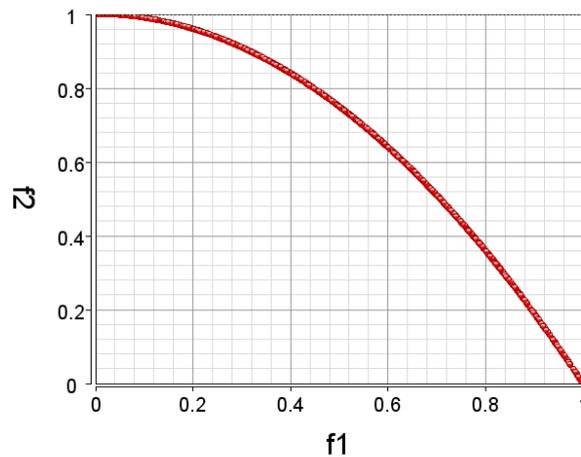


Abbildung 3.11: Eine Approximation der Pareto-Front für das ZDT2-Problem

ZDT3:

$$\begin{aligned}
 f_1 &= x_1 & x_i &\in [0, 1], i = 1, 2, \dots, N \\
 g &= 1 + 9 \sum_{i=2}^k \frac{x_i}{N-1} \\
 h &= 1 - \sqrt{\frac{f_1}{g} - \left(\frac{f_1}{g}\right) \sin(10\pi \cdot f_1)}
 \end{aligned}$$

ZDT3 entsteht aus dem ersten Problem, wenn von h der Term $\left(\frac{f_1}{g}\right) \sin(10\pi \cdot f_1)$ subtrahiert wird. Dadurch kommt eine nicht zusammenhängende Pareto-Front zustande, wie in der folgenden Abbildung 3.12 dargestellt wird. Durch diese Veränderung wird es für ein Optimierungsverfahren schwieriger, alle Teile der Pareto-Front zu finden.

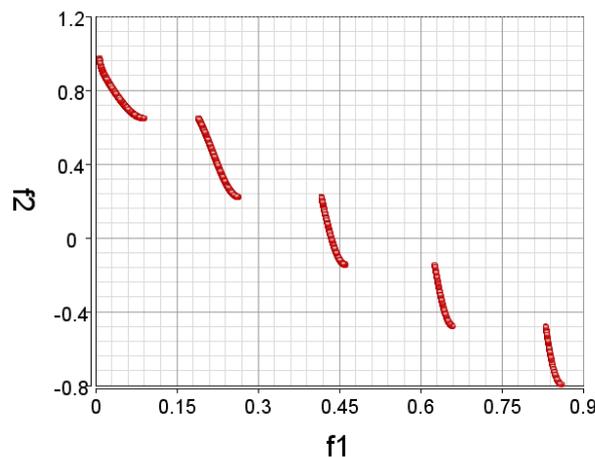


Abbildung 3.12: Eine Approximation der Pareto-Front für das ZDT3-Problem

ZDT4:

$$\begin{aligned}
 f_1 &= x_1 & x_1 &\in [0, 1] \\
 g &= 1 + 10(N - 1) + \sum_{i=2}^N (x_i^2 - 10 \cos(4\pi \cdot x_i)) & x_i &\in [-5, 5], i = 2, \dots, N \\
 h &= 1 - \sqrt{\frac{f_1}{g}}
 \end{aligned}$$

ZDT4 entsteht aus ZDT1 durch Ersetzen der g-Funktion. Die neue g-Funktion besitzt viele lokale Minima, dadurch erhält ZDT4 mehrere lokale Pareto-Fronten, die die Konvergenz zur globalen Pareto-Front erschweren. Die Pareto-Front bleibt jedoch gleich der von ZDT1 für $g=1$.

ZDT6:

$$\begin{aligned}
 f_1 &= 1 - \sin^6(6\pi \cdot x_1) e^{-4x_1} & x_i &\in [0, 1], i = 1, 2, \dots, N \\
 g &= 1 + 9 \left(\sum_{i=2}^k \left(\frac{x_i}{N-1} \right) \right)^{0.25} \\
 h &= 1 - \left(\frac{f_1}{g} \right)^2
 \end{aligned}$$

Die ZDT6-Aufgabe entsteht aus ZDT2 durch Änderung der g-Funktion, indem von der Summe die vierte Wurzel gezogen und f_1 ersetzt wird. Eine Darstellung der Pareto-Front dieser Aufgabe befindet sich in Abbildung 3.13. Zusätzlich dazu sind 200 im Parameterraum gleich verteilte Lösungen für $x_1 \in [0, 1]$ erhalten, um die Verzerrung auf der Pareto-Front zu demonstrieren.

Die Herausforderung bei diesem Problem besteht darin, zur Pareto-Front zu konvergieren und möglichst viele verschiedene Lösungen zu finden.

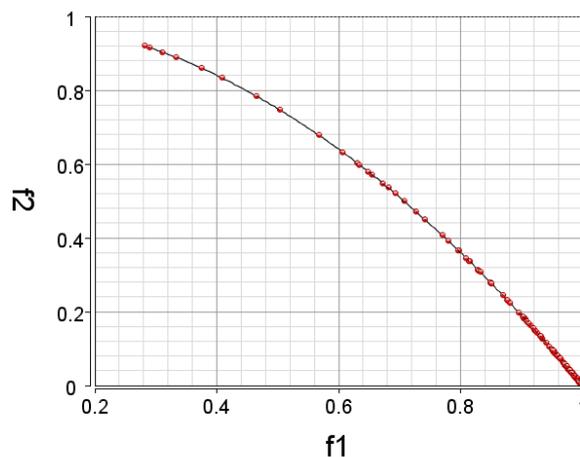


Abbildung 3.13: Darstellung der Pareto-Front für das ZDT6-Problem

Fazit

Die Eigenschaften, die die ZDT-Testsuite abdeckt, werden in der Tabelle 3.1 aufgeführt. Dazu kommt noch die Eigenschaft Täuschung der Aufgabe ZDT5. Da das Problem ZDT5 jedoch binär codiert ist, wurde es in dieser Arbeit nicht besprochen. Die Anzahl der Parameter bei dieser Testsuite sind skalierbar, jedoch besitzen alle Probleme nur zwei Zielfunktionen. Die ZDT-Testsuite hat außerdem kein Problem mit Flachem Bereich und kein Problem mit einer entarteten Pareto-Front.

	Form der Pareto-Front	sonstige Eigenschaften
ZDT1	konvex	keine
ZDT2	konkav	keine
ZDT3	nicht zusammenhängend	keine
ZDT4	konvex	multimodal
ZDT6	konkav	Verzerrung in der Pareto-Front, Verzerrung allgemein

Tabelle 3.1: Überblick der Eigenschaften der ZDT-Testprobleme

3.3 DTLZ-Testsuite

Die DTLZ-Toolbox⁶ geht auf Deb, Thiele, Laumanns und Zitzler zurück, von denen sie auch ihren Namen hat, sie wurde in der Literatur oft verwendet. Bei dieser Toolbox ist die Anzahl der Zielfunktionen f_i skalierbar, wobei $M > 1$ und $f_i \rightarrow \min$ für $i = 1, 2, \dots, M$. Auch die Anzahl der Parameter ist skalierbar, jedoch muss es mindestens M geben. DTLZ1-DTLZ7 haben keine Nebenbedingungen und wurden mit der Bottom-Up Methode entwickelt.

DTLZ1:

$$\begin{aligned}
 f_1 &= (1 + g)0.5 \prod_{i=1}^{M-1} x_i \\
 f_{j=2:M-1} &= (1 + g)0.5 \left(\prod_{i=1}^{M-j} x_i \right) (1 - x_{M-j+1}) \\
 f_M &= (1 + g)0.5 (1 - x_1) \\
 g(x_M, \dots, x_N) &= 100 \left[N - M + 1 + \sum_{i=M}^N ((x_i - 0.5)^2 - \cos(20\pi(x_i - 0.5))) \right] \\
 & \quad x_i \in [0, 1], i = 1, 2, \dots, N
 \end{aligned}$$

Die Aufgabe DTLZ1 hat eine lineare Pareto-Front. Sie wird durch die Hyperebene: $\sum_{i=1}^M f_i = 0.5$ beschrieben und entsteht für $g = 0$. Außerdem hat die DTLZ1-Aufgabe viele lokale Pareto-Fronten, die für die lokalen Minima der g -Funktion entstehen und die Konvergenz zur Pareto-Front erschweren. In der Abbildung 3.14 sieht man eine Approximation der Pareto-Front für 3 Zielfunktionen.

⁶ siehe [8]

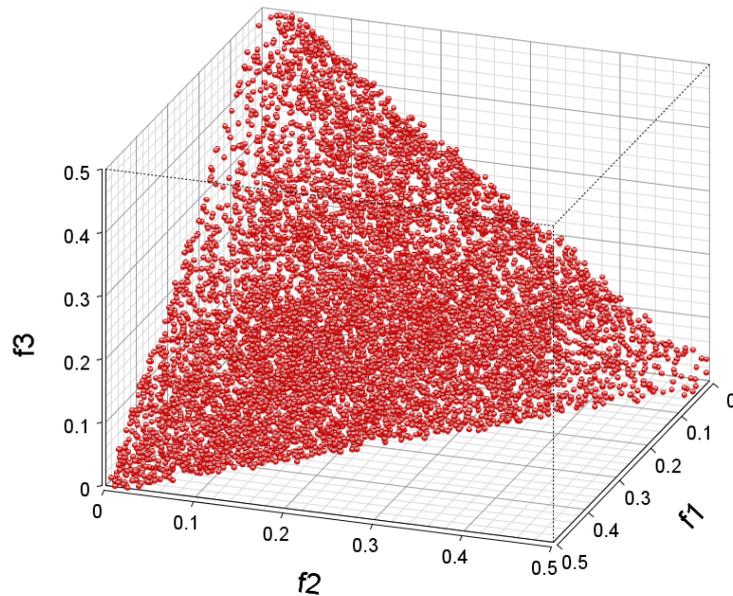


Abbildung 3.14: Eine Approximation der Pareto-Front für das DTLZ1-Problem für $M=3$ $N=6$

DTLZ2:

$$\begin{aligned}
 f_1 &= (1 + g) \prod_{i=1}^{M-1} \cos(x_i \frac{\pi}{2}) & x_i \in [0, 1], i = 1, 2, \dots, N \\
 f_{j=2:M-1} &= (1 + g) (\prod_{i=1}^{M-j} \cos(x_i \frac{\pi}{2})) \sin(x_{M-j+1} \frac{\pi}{2}) \\
 f_M &= (1 + g) \sin(x_1 \frac{\pi}{2}) \\
 g(x_M, \dots, x_N) &= \sum_{i=M}^N (x_i - 0.5)^2
 \end{aligned}$$

Die Pareto-Front der Aufgabe DTLZ2 ist die Einheitskugel im ersten Quadranten und ist somit konkav. Sie entsteht wie bei DTLZ1 für $g = 0$ und es gilt: $\sum_{i=1}^M f_i^2 = 1$ für alle Lösungen, die sich auf der Pareto-Front befinden. In der Abbildung 3.15 sieht man eine Approximation der Pareto-Front für 3 Zielfunktionen.

DTLZ3:

$$\begin{aligned}
 f_1 &= (1 + g) \prod_{i=1}^{M-1} \cos(x_i \frac{\pi}{2}) \\
 f_{j=2:M-1} &= (1 + g) (\prod_{i=1}^{M-j} \cos(x_i \frac{\pi}{2})) \sin(x_{M-j+1} \frac{\pi}{2}) \\
 f_M &= (1 + g) \sin(x_1 \frac{\pi}{2}) \\
 g(x_M, \dots, x_N) &= 100[N - M + 1 + \sum_{i=M}^N ((x_i - 0.5)^2 - \cos(20\pi(x_i - 0.5)))] \\
 & x_i \in [0, 1], i = 1, 2, \dots, N
 \end{aligned}$$

Die Aufgabe DTLZ3 entsteht aus DTLZ2, wenn man die g -Funktion durch die aus DTLZ1 ersetzt. Sie besitzt somit auch die selbe globale Pareto-Front wie DTLZ2 und zusätzlich viele lokale Pareto-Fronten. .

DTLZ4:

$$\begin{aligned}
f_1 &= (1+g) \prod_{i=1}^{M-1} \cos(x_i^\alpha \frac{\pi}{2}) & x_i \in [0, 1], i = 1, 2, \dots, N \\
f_{j=2:M-1} &= (1+g) (\prod_{i=1}^{M-j} \cos(x_i^\alpha \frac{\pi}{2})) \sin(x_{M-j+1}^\alpha \frac{\pi}{2}) \\
f_M &= (1+g) \sin(x_1^\alpha \frac{\pi}{2}) \\
g(x_M, \dots, x_N) &= \sum_{i=M}^N (x_i - 0.5)^2
\end{aligned}$$

Die Aufgabe DTLZ4 entsteht aus DTLZ2 durch das Ersetzen der x_i für $i = 1, \dots, M - 1$ durch x_i^α , dabei wird $\alpha = 100$ empfohlen. Durch diese Änderung tritt eine Verzerrung im Zielbereich auf, die es erschwert, Lösungen auf der Pareto-Front zu finden, die nicht auf dem Rand der Pareto-Front liegen. Das eben beschriebene Verhalten wird auch in den Abbildungen 4.29, 4.31 und 4.32 im Kapitel 4 dargestellt. Dieses Problem hat ebenfalls die gleiche Pareto-Front wie DTLZ2.

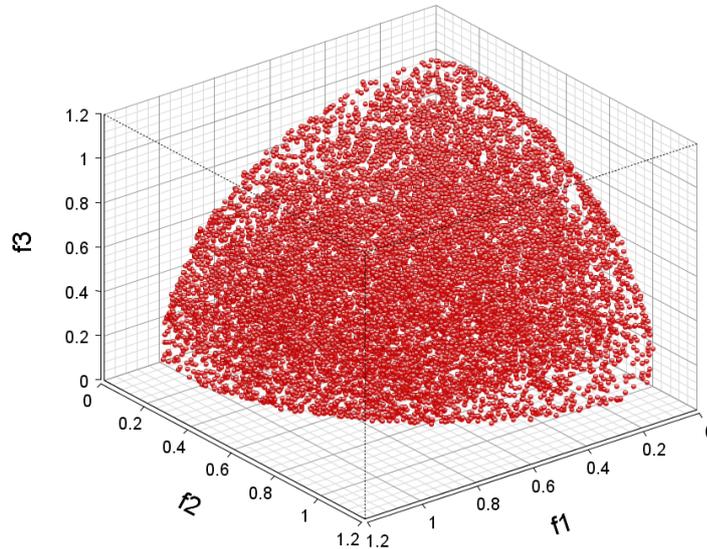


Abbildung 3.15: Eine Approximation der Pareto-Front für das DTLZ2-Problem für $M=3$ $N=5$

DTLZ5:

$$\begin{aligned}
f_1 &= (1+g) \prod_{i=1}^{M-1} \cos(\theta_i \frac{\pi}{2}) & x_i \in [0, 1], i = 1, 2, \dots, N \\
f_{j=2:M-1} &= (1+g) (\prod_{i=1}^{M-j} \cos(\theta_i \frac{\pi}{2})) \sin(\theta_{M-j+1} \frac{\pi}{2}) \\
f_M &= (1+g) \sin(\theta_1 \frac{\pi}{2}) \\
\theta_1 &= x_1 \\
\theta_i &= \frac{1+2g \cdot x_i}{2(1+g)} & i = 2, \dots, M-1 \\
g(x_M, \dots, x_N) &= \sum_{i=M}^N (x_i - 0.5)^2
\end{aligned}$$

Die Aufgabe DTLZ5 entsteht aus DTLZ2, wobei die x_i durch θ_i , für $i = 2, \dots, M - 1$ ersetzt werden. Die Pareto-Front entsteht für die Dimension 2 bzw. 3 durch $g = 0$ und

ist ein Punkt bzw. eine Kurve. Laut [10] kommen Teile der Pareto-Front für mehr als 3 Ziele auch für $g \neq 0$ zustande, wodurch die entartete Pareto-Front nicht mehr gewährleistet ist. Für 3 Ziele ist die Pareto-Front eine Kurve wie in Abbildung 3.16 dargestellt wird. Diese Aufgabe erschwert es einem Optimierungsverfahren zu erkennen, dass die Pareto-Front eine niedrigere Dimension als der Zielbereich hat.

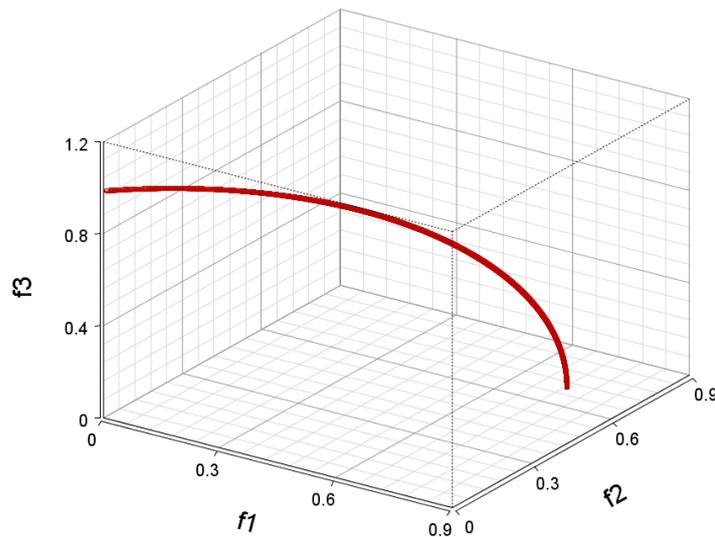


Abbildung 3.16: Eine Approximation der Pareto-Front für das DTLZ5-Problem für $M=3$ $N=5$

DTLZ6:

$$\begin{aligned}
 f_1 &= (1 + g) \prod_{i=1}^{M-1} \cos(\theta_i \frac{\pi}{2}) & x_i \in [0, 1], i = 1, 2, \dots, N \\
 f_{j=2:M-1} &= (1 + g) (\prod_{i=1}^{M-j} \cos(\theta_i \frac{\pi}{2})) \sin(\theta_{M-j+1} \frac{\pi}{2}) \\
 f_M &= (1 + g) \sin(\theta_1 \frac{\pi}{2}) \\
 \theta_1 &= x_1 \\
 \theta_i &= \frac{1 + 2g \cdot x_i}{2(1+g)} & i = 2, \dots, M-1 \\
 g(x_M, \dots, x_N) &= \sum_{i=M}^N x_i^{0.1}
 \end{aligned}$$

Die Aufgabe DTLZ6 unterscheidet sich von der Aufgabe DTLZ5 darin, dass die g -Funktion ausgetauscht wurde. Durch die neue g -Funktion wird es durch Verzerrung des Zielbereiches erschwert, zur Pareto-Front zu konvergieren. Die Pareto-Front bleibt die selbe wie beim DTLZ5-Problem.

DTLZ7:

$$\begin{aligned}
 f_{j=1:M-1} &= x_j \\
 f_M &= (1+g)\left(M - \sum_{i=1}^{M-1} \left[\frac{f_i}{1+g}(1 + \sin(3\pi \cdot f_i))\right]\right) \\
 g(x_M, \dots, x_N) &= 1 + \frac{9}{N-M+1} \sum_{i=M}^N x_i \\
 x_i &\in [0, 1], i = 1, 2, \dots, N
 \end{aligned}$$

Der Aufbau der Aufgabe DTLZ7 ist ähnlich wie bei der ZDT-Testsuite, jedoch kann die Anzahl der Ziele vom Anwender festgelegt werden. Ihre Pareto-Front ist nicht zusammenhängend und wird in Abbildung 3.17 dargestellt. Die Aufgabe erschwert es einem Optimierungsverfahren, Lösungen in allen Teilen der Pareto-Front zu ermitteln.

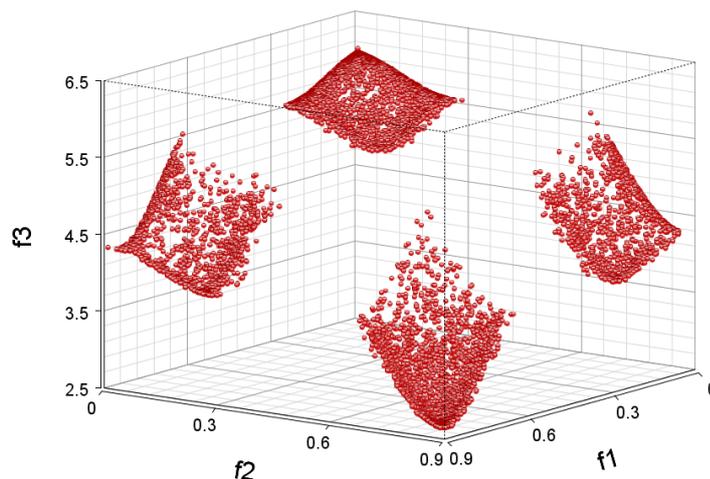


Abbildung 3.17: Eine Approximation der Pareto-Front für das DTLZ7-Problem für $M=3$ $N=5$

Fazit

Die DTLZ-Testsuite umfasst mehrere Eigenschaften, die in Tabelle 3.2 noch einmal aufgeführt werden. Dabei hat diese Testsuite den großen Vorteil, dass die Anzahl der Ziele und Parameter skalierbar ist. Es ist jedoch keine Aufgabe mit flachen Bereichen oder Täuschung vorhanden. Zusätzlich ist kein Problem mit konkaver Pareto-Front in der DTLZ-Testsuite enthalten.

	Form der Pareto-Front	Sonstige Eigenschaften
DTLZ1	linear	multimodal
DTLZ2	konkav	keine
DTLZ3	konkav	multimodal
DTLZ4	konkav	Verzerrung der Pareto-Front
DTLZ5	entartet für $M < 4$	keine
DTLZ6	entartet für $M < 4$	Verzerrung des Zielbereiches
DTLZ7	nicht zusammenhängend	keine

Tabelle 3.2: Überblick der Eigenschaften der DTLZ-Testprobleme

3.4 Testprobleme mit Nebenbedingungen

Modifizierte DTLZ-Probleme mit Nebenbedingungen

In [11] wurden einige Testprobleme eingeführt, bei denen manchen Aufgaben der DTLZ-Testsuite Nebenbedingungen hinzugefügt wurden.

C1-DTLZ1

Anders als beim ursprünglichen Problem existiert bei diesem eine Nebenbedingung, die einen Teil des Zielbereiches unzulässig macht. Durch die Multimodalität des zugrunde liegenden DTLZ1-Problems ist die Schwierigkeit dieser Aufgabe, zur Pareto-Front zu konvergieren. Das wird durch die Nebenbedingung zusätzlich erschwert, da nur Lösungen Nähe der Pareto-Front zulässig sind. Außerdem beeinflusst die Nebenbedingung c auch die Verteilung der Lösungen. Es werden deutlich weniger Lösungen für den Bereich gefunden, indem sich die Pareto-Front und die Nebenbedingung schneiden.

Ein Teil des Zielraumes ist für 2 Ziele in Abbildung 3.18 dargestellt. Dabei ist die Pareto-Front des Ursprungsproblem mit einer schwarzen Gerade gekennzeichnet und der unzulässige Bereich wird rot schraffiert dargestellt. Ebenso wird es in den Abbildungen für die folgenden Probleme mit Nebenbedingungen gehandhabt.

$$\begin{aligned}
 f_1 &= (1+g)0.5 \prod_{i=1}^{M-1} x_i \\
 f_{j=2:m-1} &= (1+g)0.5 \left(\prod_{i=1}^{M-j} x_i \right) (1 - x_{M-j+1}) \\
 f_M &= (1+g)0.5(1 - x_1) \\
 g(x_M, \dots, x_N) &= 100 \left[N - M + 1 + \sum_{i=M}^N ((x_i - 0.5)^2 - \cos(20\pi(x_i - 0.5))) \right] \\
 c &= 1 - \frac{f_M}{0.6} - \sum_{i=1}^{M-1} \frac{f_i}{0.5} \geq 0 \\
 & x_i \in [0, 1], i = 1, 2, \dots, N
 \end{aligned}$$

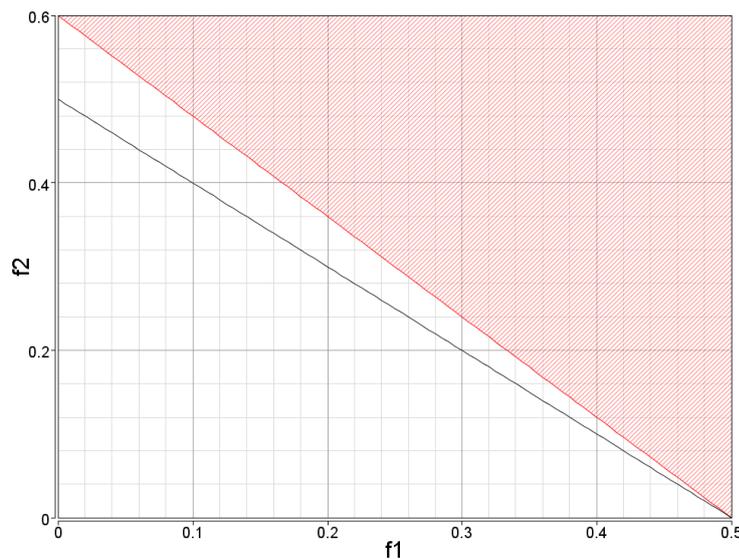


Abbildung 3.18: C1-DTLZ1-Zielbereich für M=2

C2-DTLZ2

Bei diesem Problem wurde sowohl eine Nebenbedingung hinzugefügt, als auch die Zielfunktionen geändert. Die ursprünglichen Zielfunktionen f_i werden für $i = 1, 2, \dots, M - 1$ mit 4 potenziert und die Funktion f_M wird quadriert. Die Änderung der Zielfunktionen hat Auswirkung auf die Form der Pareto-Front, die bei dieser Aufgabe konvex ist, siehe Abbildung 3.19.

Durch die Nebenbedingung wird die Gerade vom Punkt $(0, 0, \dots, 0)$ zum Punkt $(1, 1, \dots, 1)$ und der von ihr umgebene Bereich zum Radius r unzulässig, wodurch ein Loch in der ursprünglichen Pareto-Front entsteht. Für $M=2$ entsteht so eine diskrete Pareto-Front, was für $M=3$ nicht mehr gilt, wie auch im folgenden Kapitel in den Abbildungen 4.48-4.50 zu sehen ist. Verfahren, die bei konvexen Pareto-Fronten hauptsächlich Lösungen im Zentrum der Pareto-Front finden, könnten bei dieser Aufgabe Probleme bekommen, da ein Teil des Zentrums unzulässig ist.

$$\begin{aligned}
 f_1 &= ((1+g) \prod_{i=1}^{M-1} \cos(x_i \frac{\pi}{2}))^4 & x_i \in [0, 1], i = 1, 2, \dots, N \\
 f_{j=2:m-1} &= ((1+g) (\prod_{i=1}^{M-j} \cos(x_i \frac{\pi}{2})) \sin(x_{m-j+1} \frac{\pi}{2}))^4 \\
 f_M &= ((1+g) \sin(x_1 \frac{\pi}{2}))^2 \\
 c &= \sum_{i=1}^M (f_i - \lambda)^2 - r^2 \geq 0 \\
 g(x_M, \dots, x_N) &= \sum_{i=M}^N (x_i - 0.5)^2
 \end{aligned}$$

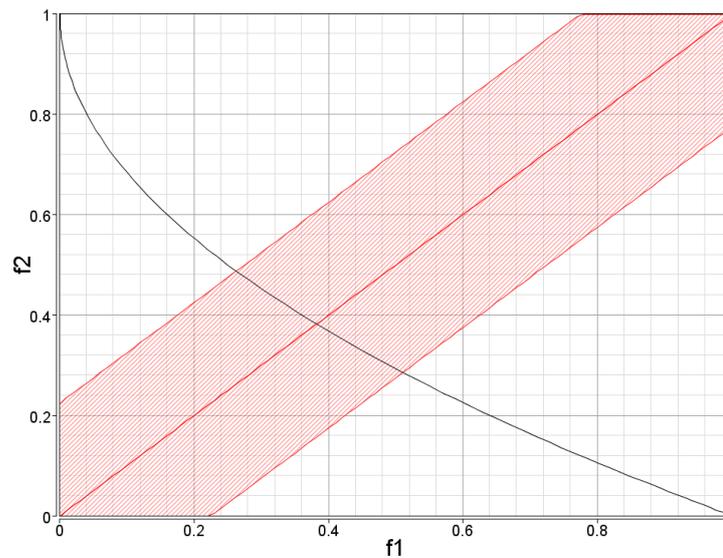


Abbildung 3.19: C2-DTLZ2-Zielbereich für M=2

C3-DTLZ1

Das C3-DTLZ1-Problem entsteht aus dem DTLZ1-Problem durch das Hinzufügen von M Nebenbedingungen. Diese verursachen, dass die Pareto-Front des DTLZ1-Problems nicht mehr zum zulässigen Bereich gehört. Die Pareto-Front dieser Aufgabe ist ein Teil der Vereinigung der Hyperebenen $c_i = 0, i = 1, \dots, M$.

Dieses Verhalten wird auch in der Abbildung 3.20 dargestellt, wobei die Pareto-Front die Grenze vom zulässigen zum unzulässigen Bereich ist. Die Pareto-Front des ursprünglichen Problems ist die schwarze Gerade im unzulässigen Bereich. Dieses Problem erbt die Multimodalität der DTLZ1-Aufgabe. Diese Aufgabe hat zusätzlich die Schwierigkeit, Lösungen auf der Pareto-Front zu finden, da die Pareto-Front durch die Nebenbedingungen entsteht.

$$\begin{aligned}
 f_1 &= (1+g)0.5 \prod_{i=1}^{M-1} x_i \\
 f_{j=2:m-1} &= (1+g)0.5 \left(\prod_{i=1}^{M-j} x_i \right) (1 - x_{M-j+1}) \\
 f_M &= (1+g)0.5 (1 - x_1) \\
 g(x_M, \dots, x_N) &= 100 \left[N - M + 1 + \sum_{i=M}^N ((x_i - 0.5)^2 - \cos(20\pi(x_i - 0.5))) \right] \\
 c_{k=1:m} &= f_k - 1 + \sum_{i=1, i \neq k}^M \frac{f_i}{0.5} \geq 0 \\
 & x_i \in [0, 1], i = 1, 2, \dots, N
 \end{aligned}$$

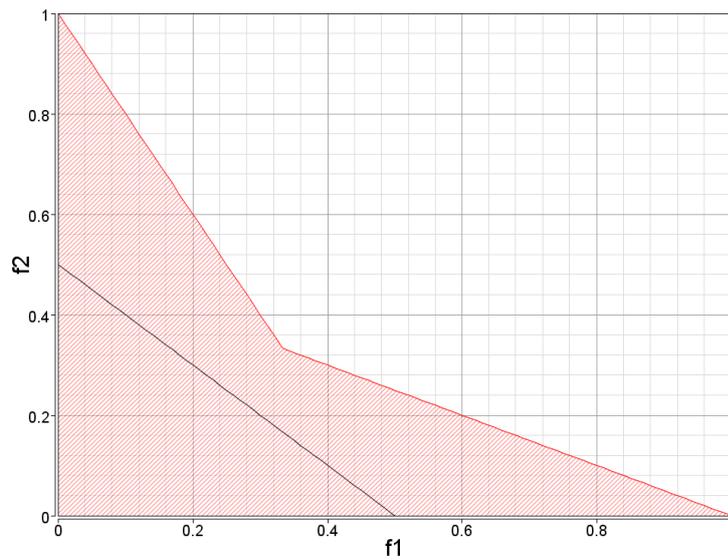


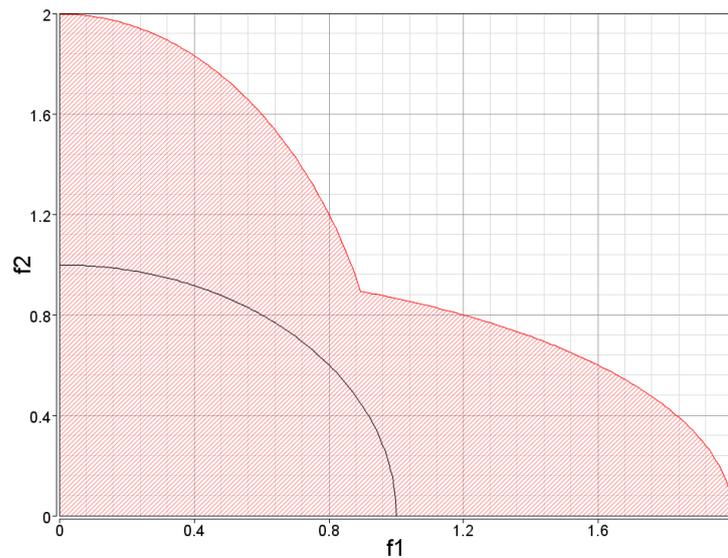
Abbildung 3.20: C3-DTLZ1-Zielbereich für M=2

C3-DTLZ4

Genau wie bei C3-DTLZ1 wird auch durch M Nebenbedingungen die Pareto-Front des DTLZ4-Problems unzulässig. Die Pareto-Front für dieses Problem besteht ebenfalls aus einem Teil der Vereinigung der Hyperflächen.

Auf Abbildung 3.21 ist die alte und neue Pareto-Front (Grenze zwischen zulässigen und unzulässigen Bereich). Zusätzlich ist bei diesem Problem eine Verzerrung wie beim Ursprungsproblem DTLZ4 vorhanden. Dadurch kommt es häufiger vor, dass nur Lösungen gefunden werden, die am äußeren Rand der Pareto-Front liegen, wie auf Abbildung 4.57 in Kapitel 4 zu sehen ist.

$$\begin{aligned}
 f_1 &= (1+g) \prod_{i=1}^{M-1} \cos(x_i \frac{\alpha \pi}{2}) & x_i \in [0, 1], i = 1, 2, \dots, N \\
 f_{j=2:m-1} &= (1+g) (\prod_{i=1}^{M-j} \cos(x_i \frac{\alpha \pi}{2})) \sin(x_{m-j+1} \frac{\alpha \pi}{2}) \\
 f_M &= (1+g) \sin(x_1 \frac{\alpha \pi}{2}) \\
 g(x_M, \dots, x_N) &= \sum_{i=M}^N (x_i - 0.5)^2 \\
 c_{k=1:m} &= \frac{f_k^2}{4} - 1 + \sum_{i=1, i \neq k}^M f_i^2 \geq 0
 \end{aligned}$$

Abbildung 3.21: C3-DTLZ4-Zielbereich für $M=2$

3.5 Sonstige Aufgaben

3.5.1 Aufgaben mit flachen Bereichen

Die Suche nach geeigneten Aufgaben mit flachen Bereichen in der Literatur erwies sich als wenig erfolgreich, weshalb zwei Aufgaben vom Autor erstellt wurden. Die eine basiert auf der Aufgabe ZDT6 und die andere auf der DTLZ1-Aufgabe. Es wurde bei beiden Aufgaben die g -Funktion durch die Funktion (3.2) aus Abschnitt 3.1.4 ersetzt.

flat-ZDT6

Die Aufgabe besitzt 2 Ziele wie ZDT6, sie hat jedoch nur noch zwei Parameter, weshalb die Parameter nicht mehr skalierbar sind. Durch Ersetzen der g -Funktion fällt die allgemeine Verzerrung im Zielbereich weg und es kommen flache Bereiche hinzu. Die Pareto-Front bleibt gleich, wie beim ursprünglichen Problem und entsteht für $g(x_2) = 1$. Die Pareto-Front wird in Abbildung 3.13 im Abschnitt 3.2 dargestellt. Die Herausforderung dieser Aufgabe besteht darin, durch die flachen Bereiche der g -Funktion zur globalen Pareto-Front zu konvergieren und auf ihr eine gute Ausbreitung an Lösungen zu finden, was durch die Funktion f_1 erschwert wird.

$$\begin{aligned}
 f_1 &= 1 - \sin^6(6\pi \cdot x_1)e^{-4x_1} & x_1 &\in [0, 1] \\
 g &= \begin{cases} 4, & x_2 \leq 0.7 \\ -30x_2 + 25, & 0.7 \leq x_2 \leq 0.8 \\ 30x_2 - 25, & 0.8 \leq x_2 \leq 0.9 \\ 4, & x_2 > 0.9 \end{cases} & x_2 &\in [-5, 5] \\
 h &= 1 - \left(\frac{f_1}{g}\right)^2
 \end{aligned}$$

flat-DTLZ1

Die Aufgabe hat M Ziele und $N=M$ Variablen. Dieses Problem hat keine Multimodalität mehr, sondern dafür flache Bereiche. Die Pareto-Front bleibt wie beim DTLZ1-Problem für $g(x_M) = 1$. Die Darstellung der Pareto-Front ist in Abbildung 3.14 im Abschnitt 3.3 zu finden. Diese Aufgabe erschwert es dem Optimierungsverfahren, zur Pareto-Front zu konvergieren.

$$\begin{aligned}
 f_1 &= (1+g)0.5 \prod_{i=1}^{M-1} x_i & x_i &\in [0, 1], i = 1, 2, \dots, M-1 \\
 f_{j=2:m-1} &= (1+g)0.5 \left(\prod_{i=1}^{M-j} x_i\right)(1-x_{M-j+1}) \\
 f_M &= (1+g)0.5(1-x_1) \\
 g(x_M) &= \begin{cases} 4, & x_M \leq 0.7 \\ -30x_M + 25, & 0.7 \leq x_M \leq 0.8 \\ 30x_M - 25, & 0.8 \leq x_M \leq 0.9 \\ 4, & x_M > 0.9 \end{cases} & x_M &\in [-5, 5]
 \end{aligned}$$

3.5.2 Aufgaben mit täuschenden lokalen Optima

Da die meisten Aufgaben mit täuschenden lokalen Optima in der Literatur binär codiert oder einkriteriell sind, wurden vom Autor wie im vorherigen Abschnitt zwei Aufgaben selbst erstellt. Dabei basiert die Erste auf ZDT3 und die Zweite auf DTLZ1. Bei beiden Problemen wurde die g -Funktion des Ursprungs-Problems durch die Funktion (3.1) aus Abschnitt 3.1.3 ersetzt.

deceptive-ZDT3

Die Aufgabe hat 2 Zielfunktionen und 2 Parameter und basiert auf dem ZDT3-Problem. Zusätzlich zu der nicht zusammenhängenden Pareto-Front kommt durch die ausgetauschte g -Funktion Täuschung hinzu. Die Pareto-Front bleibt die gleiche wie beim Original-Problem, diese ist in Abbildung 3.12 im Abschnitt 3.2 zu finden. Durch das täuschende lokale Optimum der g -Funktion wird die Konvergenz zum globalen Optimum erschwert, außerdem besteht durch die nicht zusammenhängende Pareto-Front

die Möglichkeit, dass ein Optimierungsverfahren nicht auf allen Teilen der Pareto-Front Lösungen findet.

$$\begin{aligned}
 f_1 &= x_1 & x_1, x_2 &\in [0, 1] \\
 g &= 2 + e^{-1} - e^{-\left(\frac{x_2-0.2}{0.004}\right)^2} - e^{-\left(\frac{x_2-0.6}{0.4}\right)^2} \\
 h &= 1 - \sqrt{\frac{f_1}{g}} - \left(\frac{f_1}{g}\right) \sin(10\pi \cdot f_1)
 \end{aligned}$$

deceptive-DTLZ1

Genau wie bei der flat-DTLZ1 wurde nur die g -Funktion geändert, sodass die Schwierigkeit des Problems durch Täuschung ersetzt wird und so die Herausforderung die Konvergenz zur globalen Pareto-Front ist. Die Pareto-Front dieser Aufgabe wird in Abbildung 3.14 im Abschnitt 3.3 dargestellt.

$$\begin{aligned}
 f_1 &= (1 + g)0.5 \prod_{i=1}^{M-1} x_i \\
 f_{j=2:m-1} &= (1 + g)0.5 \left(\prod_{i=1}^{M-j} x_i\right) (1 - x_{M-j+1}) \\
 f_M &= (1 + g)0.5(1 - x_1) \\
 g(x_M) &= 2 + e^{-1} - e^{-\left(\frac{x_M-0.2}{0.004}\right)^2} - e^{-\left(\frac{x_M-0.6}{0.4}\right)^2} \\
 & x_i \in [0, 1], i = 1, 2, \dots, M
 \end{aligned}$$

4 Testen der Optimierungsverfahren

In diesem Kapitel wird eine Auswahl der im vorherigen Kapitel vorgestellten Aufgaben getestet. Folgende Verfahren werden dabei verwendet: das Stochastische Suchverfahren Monte-Carlo-Optimierung, das Gradientenfreie Verfahren Nelder-Mead, das Schwarmintelligenz-Verfahren Partikelschwarm-Optimierung und die genetischen Algorithmen NSGA-II, SMS-EMOA, SPEA2 und PGA. Dabei haben die naturinspirierten Verfahren 2 unterschiedliche Parametrisierungen, einmal mit einer Population von 25 Individuen über 25 Generationen und mit einer Population von 50 Individuen über 50 Generationen. Die restlichen Parameter der Verfahren sind im Anhang B zu finden.

Bei der Bezeichnung der Verfahren wird die Populationsgröße bzw. die Anzahl der Generation in Klammern hinter der Verfahrensabkürzung angegeben. Die Lösungen der einzelnen Verfahren werden mit den im Abschnitt 4.1 vorgestellten Kriterien ausgewertet. Da es sich bei allen Verfahren außer dem Nelder-Mead um stochastische Verfahren handelt, wird jedes Verfahren 100-mal auf jedes Testproblem angewendet, um den Einfluss von günstigen oder ungünstigen Startwerten zu verringern. Dabei werden der Erwartungswert, die Standardabweichung, das Minimum und das Maximum für alle Kriterien und Verfahren bestimmt und in Tabellen angegeben, die im Anhang A zu finden sind.

Um die Ergebnisse der Auswertungs-Kriterien grafisch darzustellen, werden Tortendiagramme verwendet. Dabei werden die Mittelwerte aller Verfahren für ein bestimmtes Kriterium verhältnismäßig gegenübergestellt. Zusätzlich werden bei den meisten Aufgaben die Lösungen einzelner Verfahren in Ergebnis-Plots des Zielbereiches dargestellt, bei denen die nicht dominierten Lösungen eines der 100 Durchläufe geplottet werden.

4.1 Kriterien für die Auswertung multikriterieller Optimierungsverfahren

Die Menge $F_{i,j}$ bezeichnet die Menge aller nicht dominierten Lösungen, die ein Optimierungsverfahren gefunden hat (wobei i der Zähler für das jeweilige Optimierungsverfahren ist und j der Zähler für den jeweiligen Durchlauf). Dabei stellt $\tilde{F}_j = \bigcup_i F_{i,j}$ die Vereinigung aller erhaltenen Lösungen aus allen Verfahren in einem Durchlauf dar und $\tilde{F} = \bigcup_j \tilde{F}_j$ die Lösungen aller Verfahren in allen Durchläufen. Die einzelnen Elemente der Menge \tilde{F} werden mit \tilde{f} bezeichnet. Mit F wird die Menge bezeichnet, die aus \tilde{F} entsteht, wenn man alle dominierten Lösungen aus \tilde{F} entfernt.

4.1.1 Die Anzahl der Pareto-Punkte (PP)

Das Kriterium für die Anzahl der Pareto-Punkte gibt an, wie viele nicht dominierte Lösungen ein Verfahren in einem Durchlauf gefunden hat. Dieses Kriterium hat weder Aussagekraft über die Konvergenz zur Pareto-Front noch über die Diversität der erhaltenen Punkte.

4.1.2 Das Hypervolumen (HV)

Der Wert des Hypervolumen-Kriteriums entspricht dem Hypervolumen des Raumes, der die Punkte der Menge $F_{i,j}$ und den Referenzpunkt r überdeckt. Dabei ist der überdeckte Raum die Vereinigung der von den einzelnen Punkten überdeckten Bereiche, jedoch werden mehrfach überdeckte Bereiche nur einmal gezählt. Der überdeckte Bereich eines Punktes $f(\vec{x})$ sei $h(f(\vec{x})) = [f_1(\vec{x}), r] \times \dots \times [f_m(\vec{x}), r]$. Der Wert des Hypervolumen-Kriteriums wird wie folgt bestimmt, wobei Λ das Lebesgue-Maß ist:

$$\Lambda(\{\cup h(f(\vec{x})) | f(\vec{x}) \in F_{i,j}\}).$$

Der folgende Punkt wurde in dieser Arbeit als Referenzpunkt r verwendet:

$$r = (\max(\tilde{f}_1) + 1, \max(\tilde{f}_2) + 1, \dots, \max(\tilde{f}_M) + 1)$$

Dabei sind \tilde{f}_m die einzelnen Werte einer der Zielfunktion f_m für $m = 1, 2, \dots, M$. Mit diesem Referenzpunkt r stellt man sicher, dass alle Punkte der Mengen $F_{i,j}$ den Referenzpunkt dominieren. Das ist wichtig, damit die Hypervolumen der einzelnen Verfahren auch miteinander vergleichbar sind.

Weitere Einzelheiten über das Hypervolumen-Kriterium und Algorithmen zur Berechnung werden in [2] und [13] genauer erläutert, jedoch wird das Hypervolumen-Kriterium in den beiden Quellen mit S-Metrik bezeichnet. Das Hypervolumen dient als Maß für die Konvergenz zur Pareto-Front und für die Verteilung der Pareto-Punkte. Ein Beispiel für das Hypervolumen in einem zweidimensionalen Zielraum befindet sich in der Abbildung 4.1. In diesem Beispiel spannen die drei roten Punkte mit dem schwarzen Referenzpunkt das Hypervolumen auf, welches hellblau hinterlegt ist.

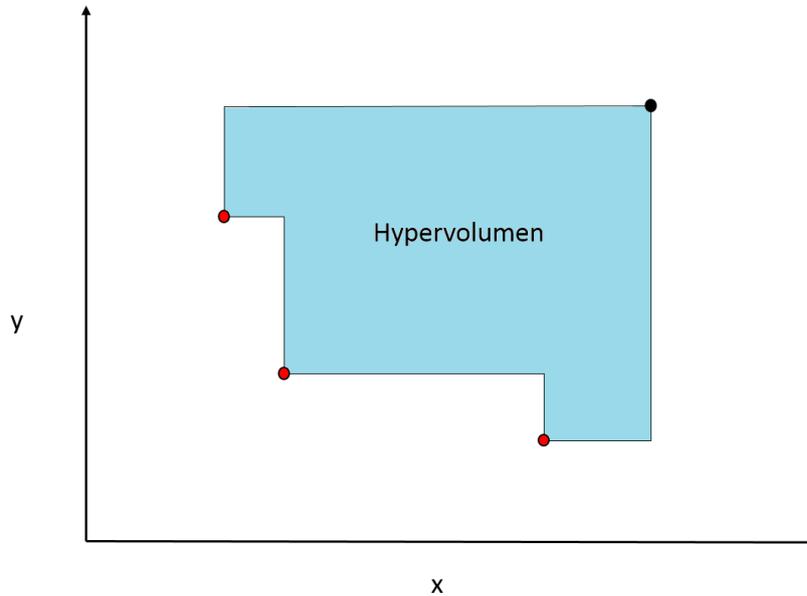


Abbildung 4.1: Beispiel Hypervolumen

4.1.3 Die Konvergenzmetrik (KM)

Die Konvergenzmetrik wurde in [5] eingeführt. Sie wertet die Konvergenz der Menge $F_{i,j}$ mithilfe der Referenzmenge aus. Idealerweise wird als Referenzmenge eine Teilmenge der Pareto-Menge verwendet. In dieser Arbeit wurde jedoch als Referenzmenge die Menge F verwendet, da die tatsächliche Pareto-Front meist nicht bekannt ist.

Für alle Pareto-Punkte der Menge $F_{i,j}$ wird die normierte Distanz d_k wie folgt berechnet:

$$d_k = \min_{j \in F} \left(\sqrt{\sum_{m=1}^M \left(\frac{f_m^{(k)} - f_m^{(j)}}{f_m^{\max} - f_m^{\min}} \right)^2} \right)$$

Dabei stehen f_m^{\min} und f_m^{\max} für den minimalen und maximalen Funktionswert der m-ten Zielfunktion in F stehen. Die Funktionswerte der m-ten Zielfunktion für die Parametervektoren $\vec{x}^{(k)}$ und $\vec{x}^{(j)}$ werden mit $f_m^{(k)}$ und $f_m^{(j)}$ bezeichnet. Mit den normierten Distanzen berechnet man die Konvergenzmetrik wie folgt.

$$KM(F_i) = \frac{1}{|F_{i,j}|} \sum_{k=1}^{|F_{i,j}|} d_k$$

4.1.4 Die Relative Dominanz (RD)

Die Relative Dominanz⁷ ist ein Kriterium, um zu bestimmen, welches Verfahren am besten zur Pareto-Front konvergiert ist. Dabei werden die Lösungen der Verfahren untereinander verglichen, da die wahre Paretomenge in der Praxis meist nicht bekannt ist. Für den Vergleich wird die Menge \tilde{F}_j gebildet und alle dominierten Punkte der Menge entfernt. Die daraus entstandene Menge wird mit F_j bezeichnen. Danach wird gezählt, wie viele Lösungen von einem bestimmten Verfahren stammen.

$$z^{(i)} = \sum_{f(\vec{x}) \in F_j} \begin{cases} 1, & \text{wenn } f(\vec{x}) \in F_{i,j} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Jedem Verfahren wird dann der Wert $RD^{(i)} = \frac{z^{(i)}}{|F_j|}$ zugeordnet, was dem relativen Anteil der Punkte an der Referenz-Pareto-Front entspricht.

4.2 ZDT-Testsuite

Von der ZDT-Testsuite werden ZDT3⁸ mit 8 Parametern sowie ZDT4⁹ und ZDT6¹⁰ mit jeweils 6 Parametern ausgeführt. Auf ZDT1-2 wurde verzichtet, da sie bis auf die Formen ihrer Pareto-Front keine weiteren Schwierigkeiten haben.

4.2.1 ZDT3

Die Schwierigkeit dieser Aufgabe besteht darin, alle Teile der nicht zusammenhängenden Pareto-Front zu erreichen, die durch den Term $-\left(\frac{f_1}{g}\right)\sin(10\pi f_1)$ in der h -Funktion zustande kommen. Der SMS-EMOA(50) und der SPEA2(50) liefern bei dieser Aufgabe die besten Lösungen. Der SMS-EMOA(50) findet im Mittel mehr Pareto-Punkte als der SPEA2 und die Relative Dominanz ist besser als beim SPEA2(50). Jedoch liefert der SPEA2(50) bessere Ergebnisse bei der Konvergenzmetrik und beim Hypervolumen als der SMS-EMOA(50).

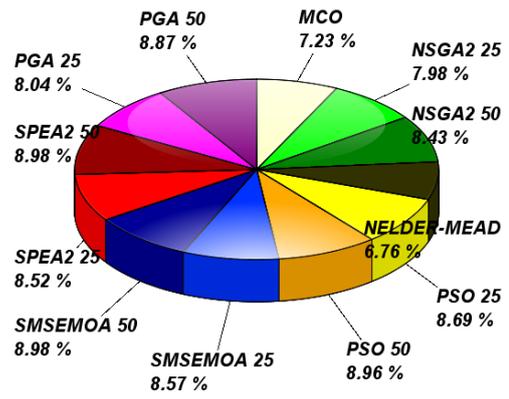
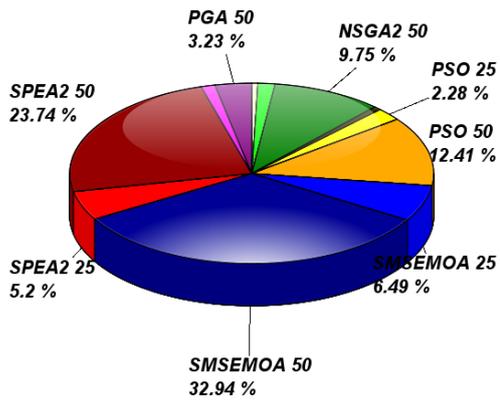
Die Partikelschwarm Optimierung liefert nach dem SPEA2(50) und dem SMS-EMOA(50) die besten Lösungen. Die verhältnismäßigen Testergebnisse werden in der Abbildung 4.2 visualisiert. Auf der Abbildung 4.3 sieht man die Ergebnisse eines einzelnen Durchlaufs für den SMS-EMOA mit der Parametrisierung 25 und 50. Die Plots für den SPEA2(50) und den PSO(50) sind auf Abbildung 4.4 zu finden.

⁷ siehe [12]

⁸ siehe Anhang A.1 für die Auswertungs-Tabellen

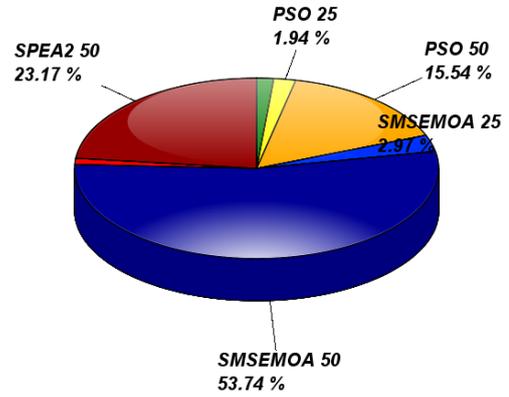
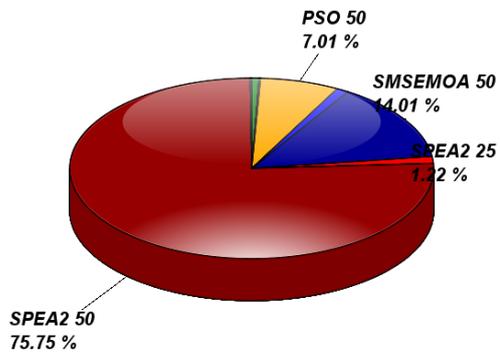
⁹ siehe Anhang A.2 für die Auswertungs-Tabellen

¹⁰ siehe Anhang A.3 für die Auswertungs-Tabellen



Anzahl der Pareto-Punkte

Hypervolumen



Konvergenzmetrik

Relative Dominanz

Abbildung 4.2: ZDT3 Tortendiagramme

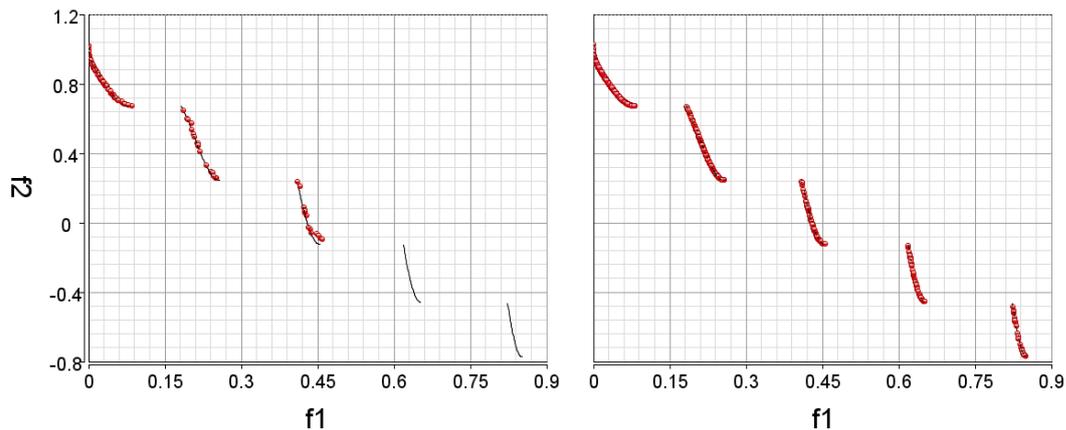


Abbildung 4.3: ZDT3-Ergebnis-Plots: SMS-EMOA(25) und SMS-EMOA(50)

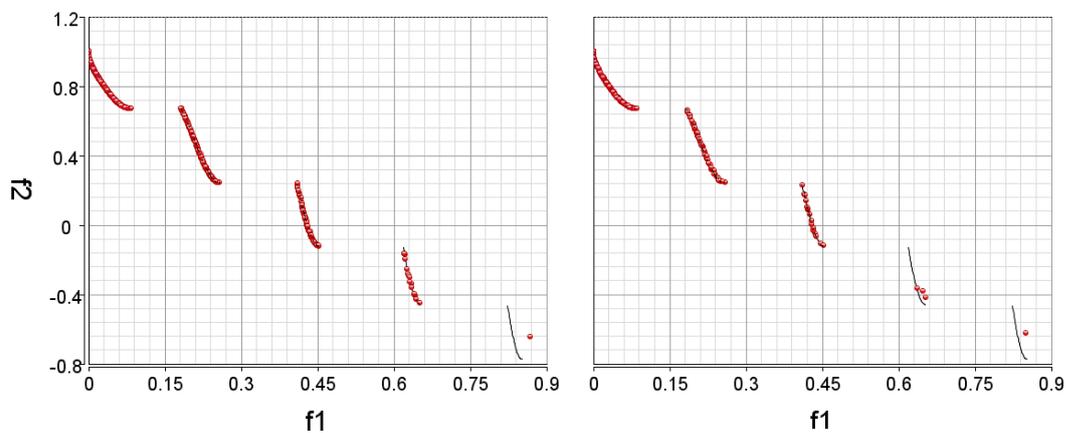


Abbildung 4.4: ZDT3-Ergebnis-Plots: SPEA2(50) und PSO(50)

4.2.2 ZDT4

Die Herausforderung bei diesem Problem ist die Konvergenz zur globalen Pareto-Front. Dies wird durch die vielen lokalen Pareto-Fronten, die durch die g -Funktion dieser Aufgabe entstehen, erschwert. Bei diesem Problem gelang es keinem der Verfahren, mit der ausgewählten Parametrisierung zur globalen Pareto-Front zu konvergieren, was hauptsächlich an der niedrigen Anzahl der Iterationen bzw. Generationen lag.

Das Verfahren NSGA-II(50) liefert bei dieser Aufgabe bei der Anzahl der Pareto-Punkte, beim Hypervolumen und bei der Relativen Dominanz die besten Ergebnisse. Bei der Konvergenzmetrik ist die Partikelschwarm-Optimierung am erfolgreichsten. Dieses Verfahren findet bei diesem Problem wenige pareto-optimale Lösungen, aber die gefundenen Lösungen sind im Mittel näher an der Pareto-Front als die der anderen Verfahren. Der PGA(50) liefert gute Werte bei der Relativen Dominanz, beim Hypervolumen

und der Konvergenzmetrik, jedoch schneidet er bei den beiden erstgenannten Kriterien schlechter als der NSGA-II(50) ab. Ein ähnliches Verhalten wie beim PGA(50) ist auch beim SPEA2(50) zu beobachten, jedoch liegt der SPEA2(50), außer bei der Anzahl der Pareto-Punkte bei allen anderen Kriterien hinter dem PGA(50).

Die Tortendiagramme für die einzelnen Kriterien sind auf der Abbildung 4.5 zu finden. Bei den Ergebnis-Plots in Abbildung 4.6 kann der PGA(50) (linke Seite) mit dem PGA(100,500) (rechte Seite) verglichen werden. Dabei ist der PGA(100,500) ein PGA mit einer Population von 100 und 500 Generationen. Der PGA(100,500) wurde benutzt, da kein Verfahren bei dieser Aufgabe zur Pareto-Front konvergieren konnte. Weitere Ergebnisplots sind in Abbildung 4.7.

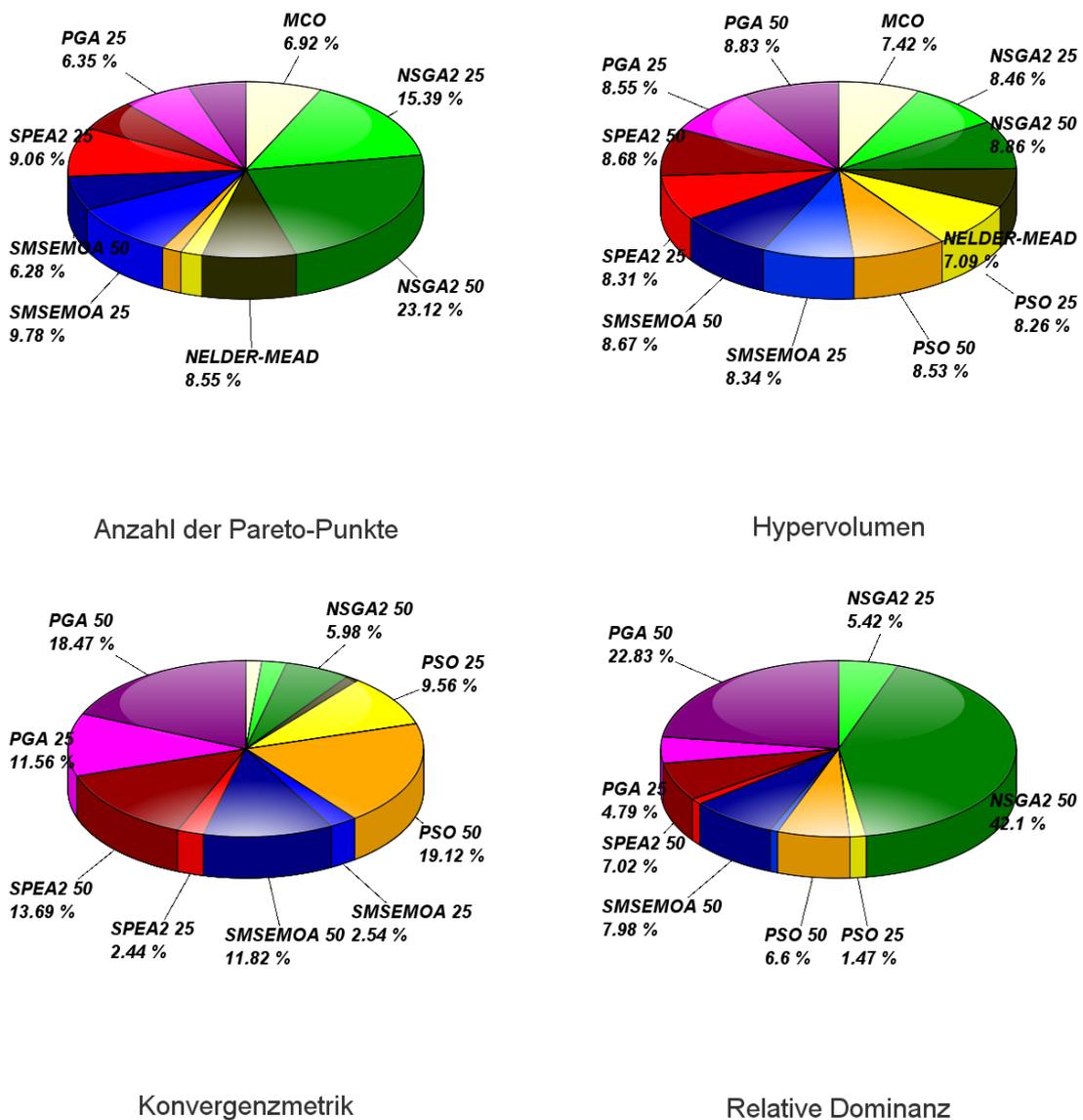


Abbildung 4.5: ZDT4 Tortendiagramme

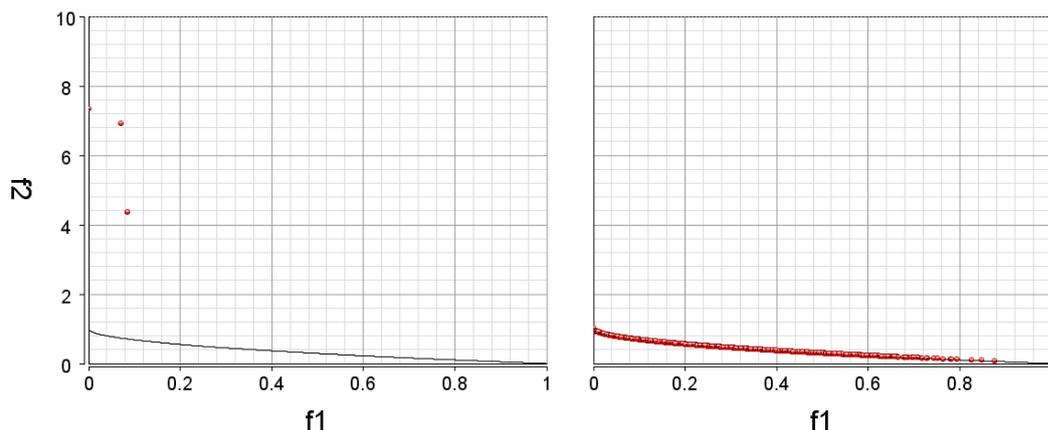


Abbildung 4.6: ZDT4-Ergebnis-Plots PGA(50) und PGA(100,500)

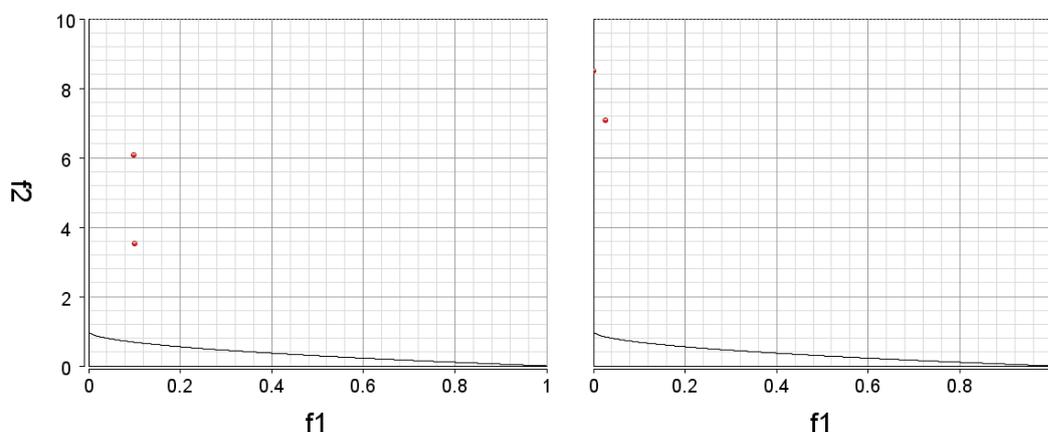


Abbildung 4.7: ZDT4-Ergebnis-Plots NSGA-II(50) und SPEA2(50)

4.2.3 ZDT6

Bei der Funktion ZDT6 ist die Herausforderung die Verzerrung, die aufgrund der g -Funktion die Konvergenz zur Pareto-Front erschwert und zusätzlich noch die Verzerrung der Pareto-Front, die durch die Funktion f_1 zustande kommt. Durch f_1 wird das Finden von Lösungen mit einer gleichmäßigen Ausbreitung auf der Pareto-Front schwieriger.

Die besten Ergebnisse bei diesem Verfahren liefert das Verfahren PSO mit der Parametrisierung 50. Es erzielt bei allen Kriterien deutlich die besten Werte. Das Verfahren PSO(25) hat nach dem PSO(50) am meisten Pareto-Punkte gefunden und auch bei der Relativen Dominanz liefert es das zweitbeste Ergebnis. Beim Hypervolumen und bei der Konvergenzmetrik schneidet das Verfahren SMS-EMOA(50) jedoch besser ab als der PSO(25). Bei der Konvergenzmetrik ist das Verfahren SPEA2(50) im Mittel besser als PSO(25), jedoch unterliegt es bei den anderen Kriterien.

Die verhältnismäßigen Ergebnisse werden in der Abbildung 4.8 dargestellt. Die Abbildungen 4.9 und 4.10 zeigen jeweils die gefundenen Pareto-optimalen Lösungen eines Durchlaufes für die 4 Verfahren, die bei diesem Problem am besten abgeschnitten haben.

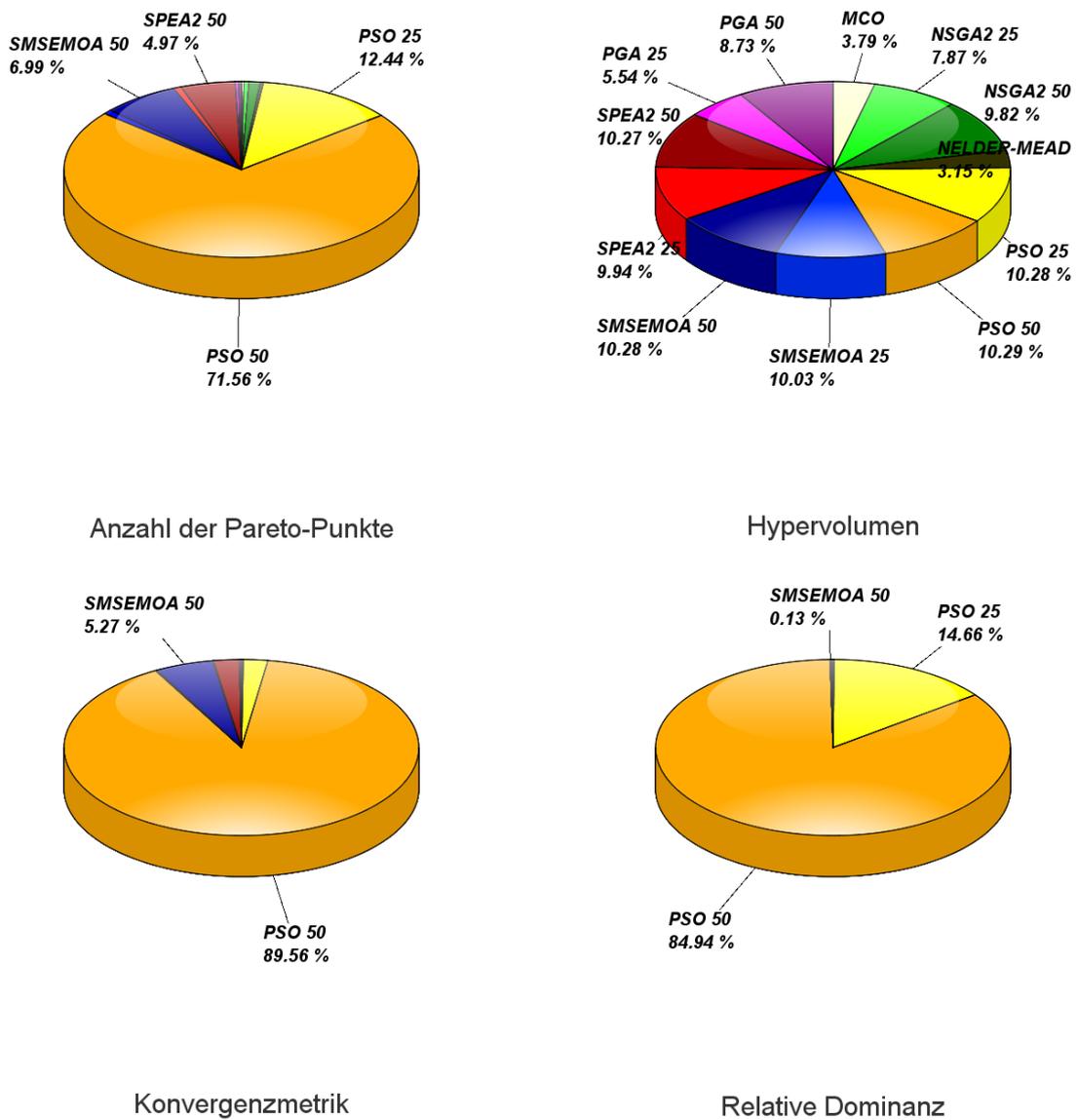


Abbildung 4.8: ZDT6 Tortendiagramme

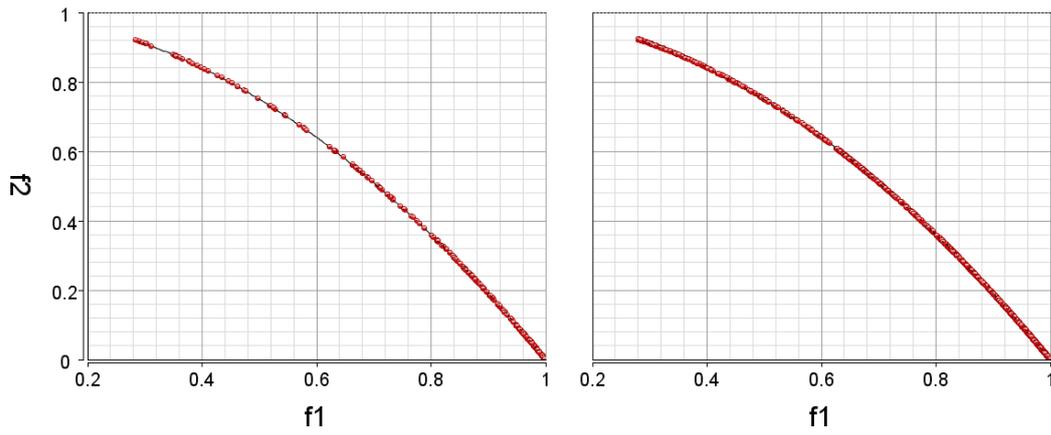


Abbildung 4.9: ZDT6-Ergebnisse: PSO(25) und PSO(50)

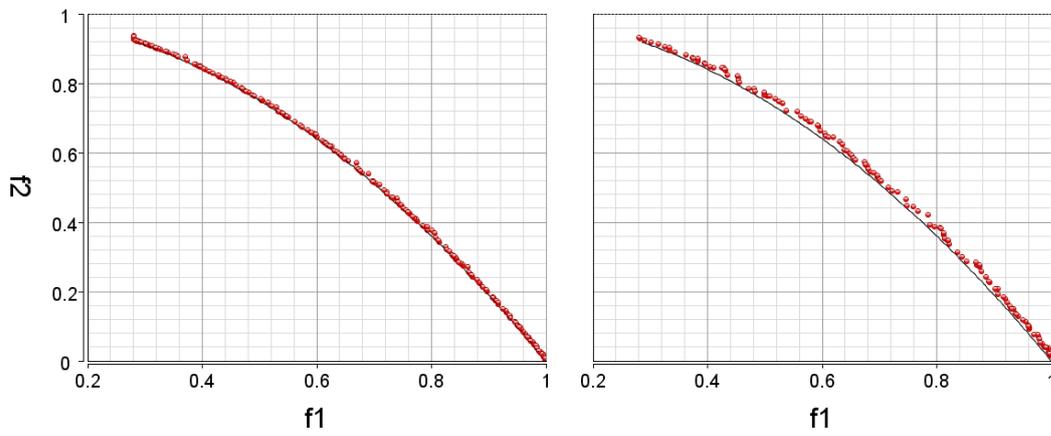


Abbildung 4.10: ZDT6 Ergebnisse: SMS-EMOA(50) und SPEA2(50)

4.3 DTLZ-Testsuite

Bei der DTLZ-Testsuite werden die Aufgaben DTLZ1¹¹ mit verschiedenen Parametern und Zielen, DTLZ2-4¹² mit jeweils 5 Parametern und DTLZ6-7¹³ mit ebenfalls 5 Parametern ausgeführt. Auf DTLZ5 wurde verzichtet, da DTLZ6 ebenfalls eine entartete Pareto-Front hat und zusätzlich allgemeine Verzerrung des Zielbereiches auftritt.

4.3.1 DTLZ1

Die Aufgabe DTLZ1 bereitet den Optimierungsverfahren durch die vielen lokalen Pareto-Fronten Probleme. Dieses Problem wird 3 mal mit variierenden Zielen und Parametern getestet um festzustellen, wie sich die Ergebnisse verändern, wenn die Anzahl der Ziele bzw. die Anzahl der Parameter erhöht werden.

4.3.1.1 DTLZ1 mit 3 Zielen und 6 Parametern

Der PGA(50) liefert bei diesem Problem mit Abstand die besten Ergebnisse und erhält bei jedem Kriterium die beste Bewertung. Keins der hier verwendeten Verfahren schafft es, die Pareto-Front so gut zu approximieren wie der PGA(50) und sie können meist nur wenige Lösungen nahe der Pareto-Front ermitteln. Der SMS-EMOA(50) und der SPEA2(50) erreichen beim Hypervolumen auch gute Ergebnisse, jedoch schneiden sie bei den anderen Kriterien deutlich schlechter als der PGA(50) ab.

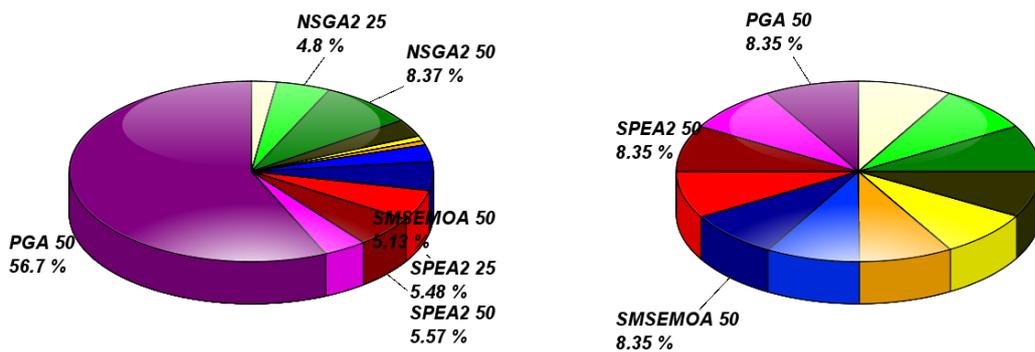
Der NSGA-II(50) ermittelt im Durchschnitt mehr Pareto-Punkte als der SMS-EMOA(50) und der SPEA 50. Er erzielt nach dem PGA(50) die beste Relative Dominanz und schafft es in einzelnen Durchläufen auch deutlich mehr Lösungen der Nähe der Pareto-Front zu finden als der SMS-EMOA(50) oder der SPEA2(50). Bei den anderen Kriterien unterliegt der NSGA-II aber dem SMS-EMOA(50) und dem SPEA2(50).

In der Abbildung 4.11 wird dargestellt, welche Verfahren verhältnismäßig die besten Lösungen geliefert haben. Ein Ergebnis-Plot für den PGA(50) findet man in Abbildung 4.13 und im Vergleich dazu die Ergebnis-Plots für den PGA(25) (Abbildung 4.12), den NSGA-II(50) (Abbildung 4.14) und den SMS-EMOA(50) (Abbildung 4.15).

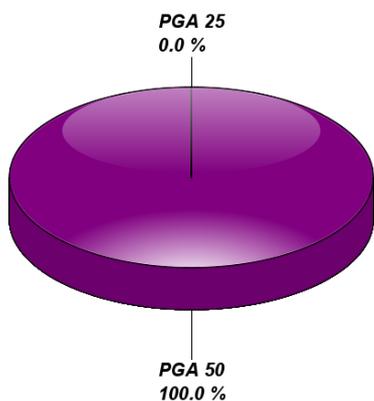
¹¹ siehe Anhang A.4 für die Auswertungs-Tabellen

¹² siehe die Anhänge A.5, A.6 und A.7 für die Auswertungs-Tabellen

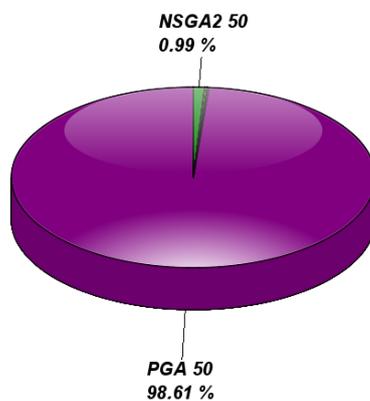
¹³ siehe die Anhänge A.8 und A.9 für die Auswertungs-Tabellen



Anzahl der Pareto-Punkte



Hypervolumen



Konvergenzmetrik

Relative Dominanz

Abbildung 4.11: DTLZ1 Tortendiagramme

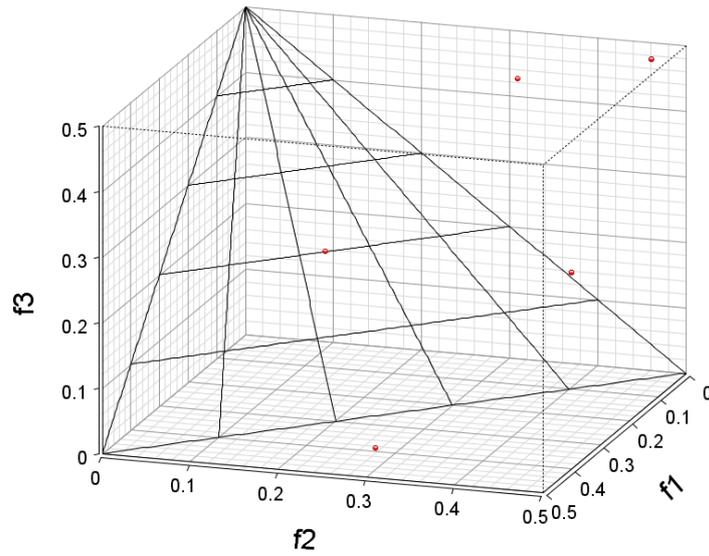


Abbildung 4.12: DTLZ1 Ergebnis-Plots : PGA(25)

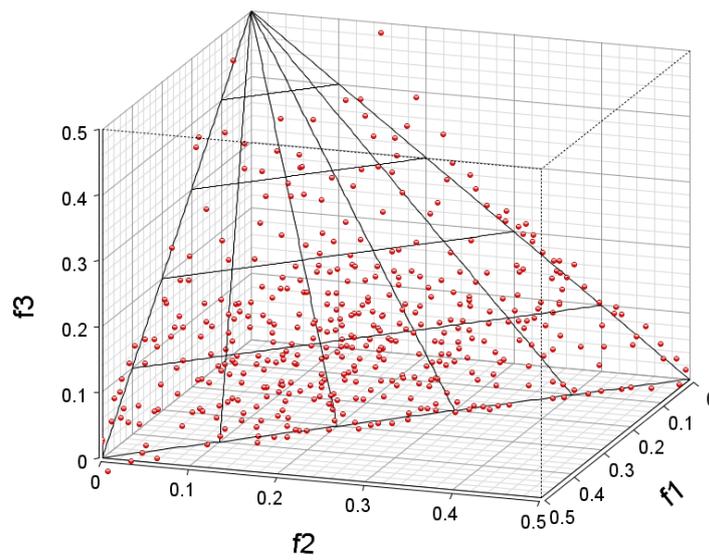


Abbildung 4.13: DTLZ1 Ergebnis-Plots: PGA(50)

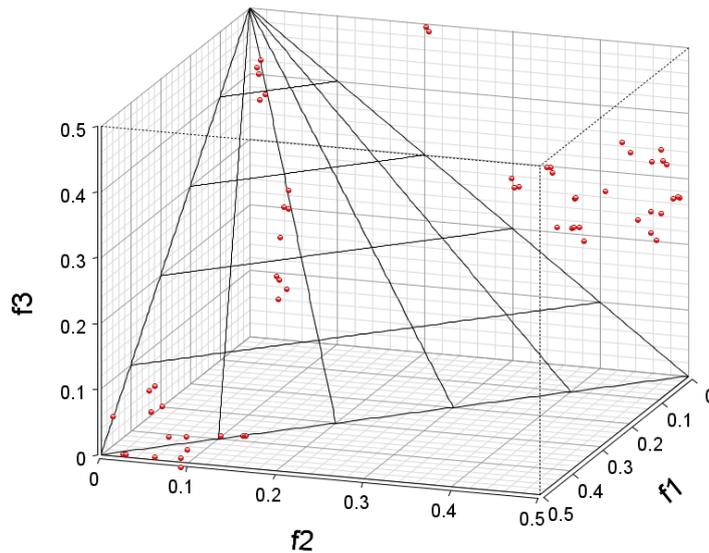


Abbildung 4.14: DTLZ1 Ergebnis-Plots: NSGA 50

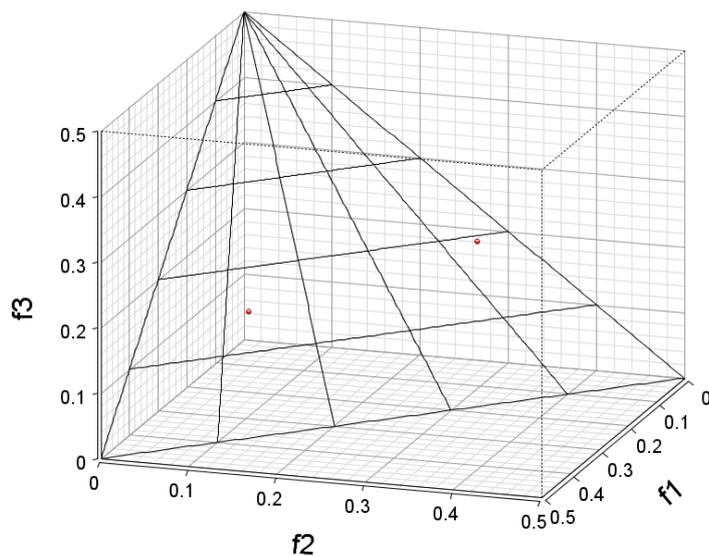


Abbildung 4.15: DTLZ1 Ergebnis-Plots: SMS-EMOA(50)

4.3.1.2 DTLZ1 mit 3 Zielen und 10 Parametern

Mit dem Ändern der Parameter auf 10 wird das Verhalten nicht groß verändert. Lediglich bei der Anzahl der Pareto-Punkte können der SPEA2, SMS-EMOA und der NSGA-II im Verhältnis bessere Ergebnisse liefern als bei der vorherigen Testaufgabe, was sich aber in den anderen Kriterien nicht weiter auswirkt.

Der PGA(50) bleibt bei diese Aufgabe das Verfahren, das bei allen Kriterien am besten bewertet wurde .Bei der Konvergenzmetrik und bei der Relativen Dominanz konnte kein anderer Algorithmus ähnlich gute Werte erzielen. Die verhältnismäßigen Bewertungen der Verfahren werden in Abbildung 4.16 dargestellt.

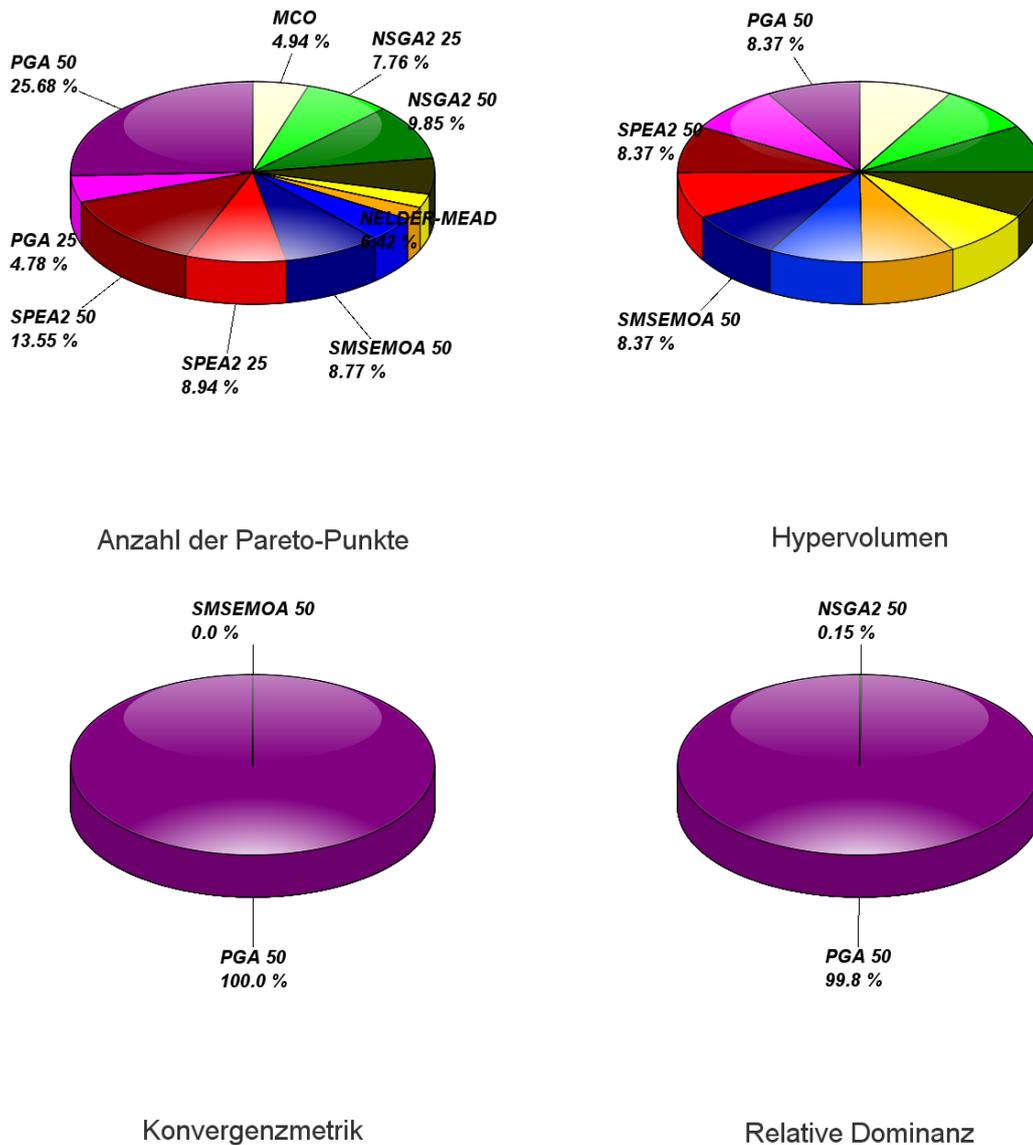


Abbildung 4.16: DTLZ1 M=3 N=10 Tortendiagramme

4.3.1.3 DTLZ1 mit 5 Zielen und 7 Variablen

Das Verhältnis der Anzahl der Pareto-Punkte ändert sich signifikant durch das Erhöhen der Ziele von 3 auf 5. Auch bei der Relativen Dominanz liefern der SMS-EMOA(50), der NSGA-II(50) sowie der SPEA2(50) bessere Ergebnisse als bei den vorherigen DTLZ1-Testläufen. Der PGA(50) bleibt jedoch auch hier das Verfahren mit den besten Lö-

sungen. Die verhältnismäßigen besten Lösungen werden in der Abbildung 4.17 dargestellt.

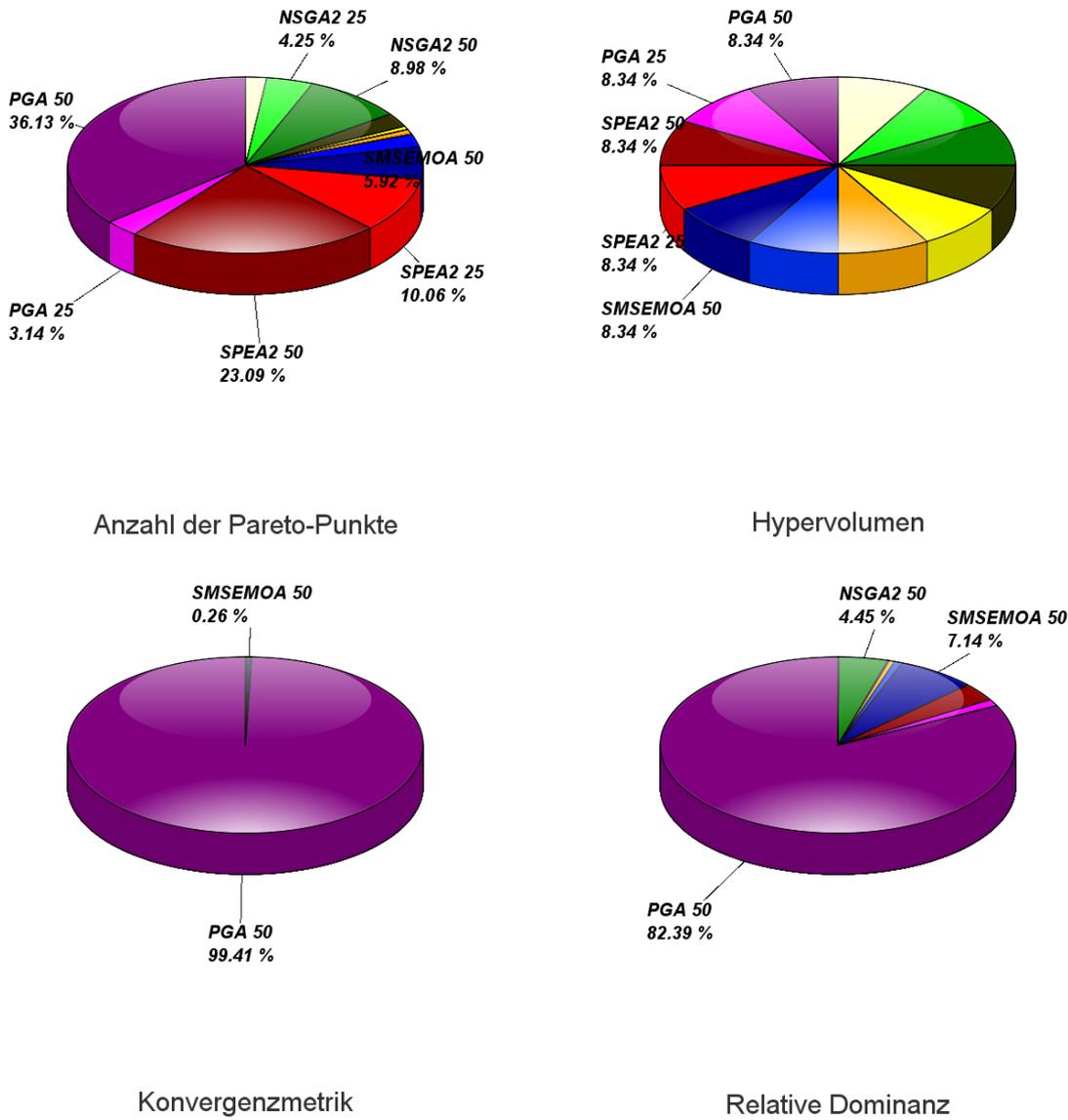


Abbildung 4.17: DTLZ1 M=5 N=7 Tortendiagramme

4.3.2 DTLZ2

Die Herausforderung bei diesem Problem ist die konkave Pareto-Front. Diese Aufgabe dient als Grundgerüst für die Probleme DTLZ3-4, die diese Aufgabe erweitern. Der SMS-EMOA(50) findet im Durchschnitt am meisten Pareto-Punkte und erzielt die besten Bewertungen beim Hypervolumen und der relativen Dominanz, wodurch man schließen kann, dass der SMS-EMOA(50) die beste Ausbreitung der Pareto-Punkte der getesteten Verfahren gewährleistet. Bei der Konvergenzmetrik liefert der PGA(50) bessere Ergeb-

nisse als der SMS-EMOA(50), ansonsten erzielt er die zweitbesten Resultate bei den anderen Kriterien.

Der SPEA2(50) kann bei der Anzahl der Pareto-Punkte und beim Hypervolumen ähnlich gute Werte wie PGA(50) aufweisen, schneidet aber bei der Konvergenzmetrik und bei der Relativen Dominanz schlechter als der PGA(50) ab. Zwar sind die Ergebnisse des NSGA-II(50) in allen Kriterien schlechter als beim SPEA2(50), ansonsten ist das Verhalten ähnlich. Die verhältnismäßigen Ergebnisse sind in der Abbildung 4.18 dargestellt. Die Ergebnis-Plots sind in den Abbildungen 4.19, 4.20, 4.21 und 4.22 zu finden.

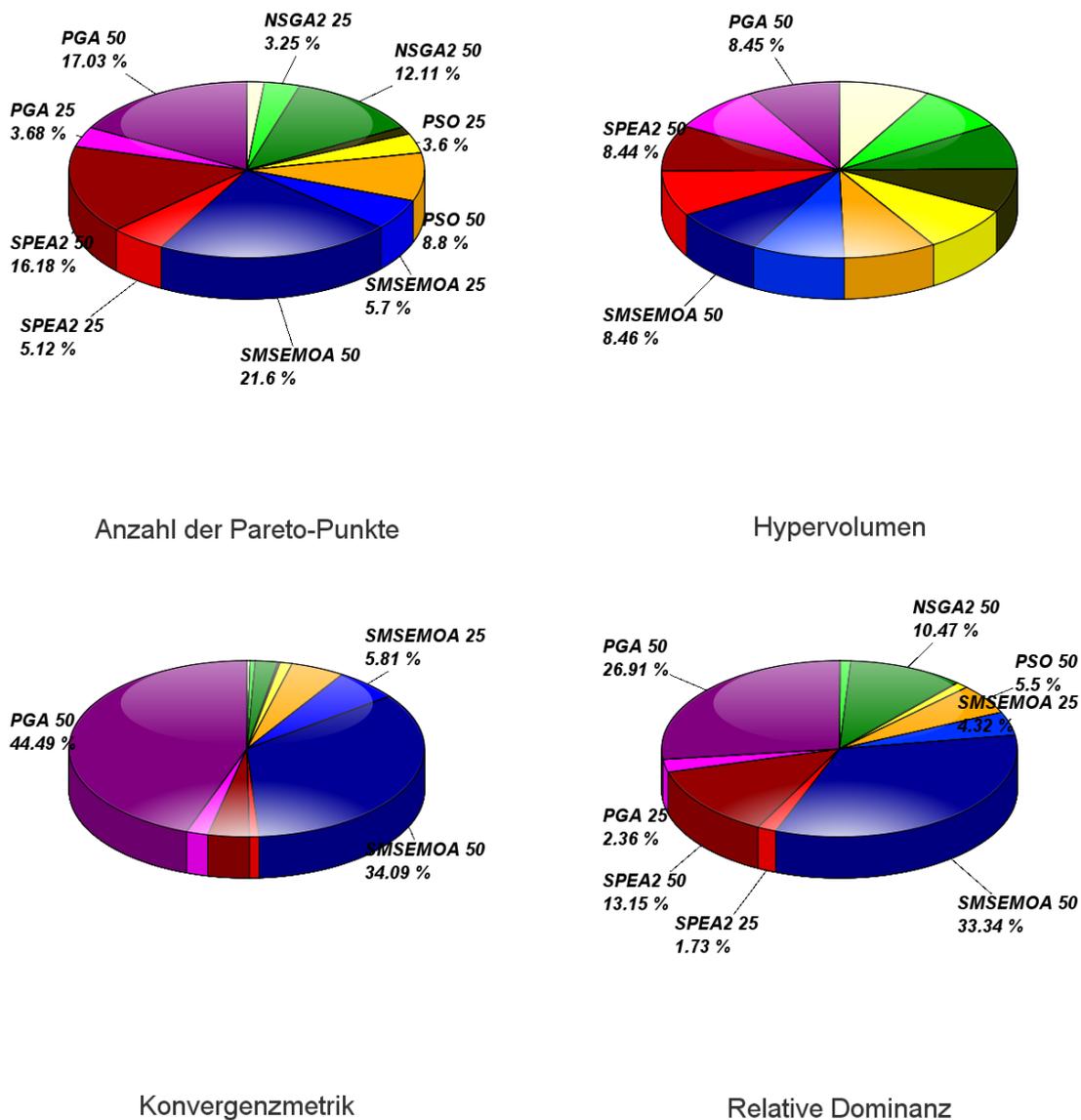


Abbildung 4.18: DTLZ2 Tortendiagramme

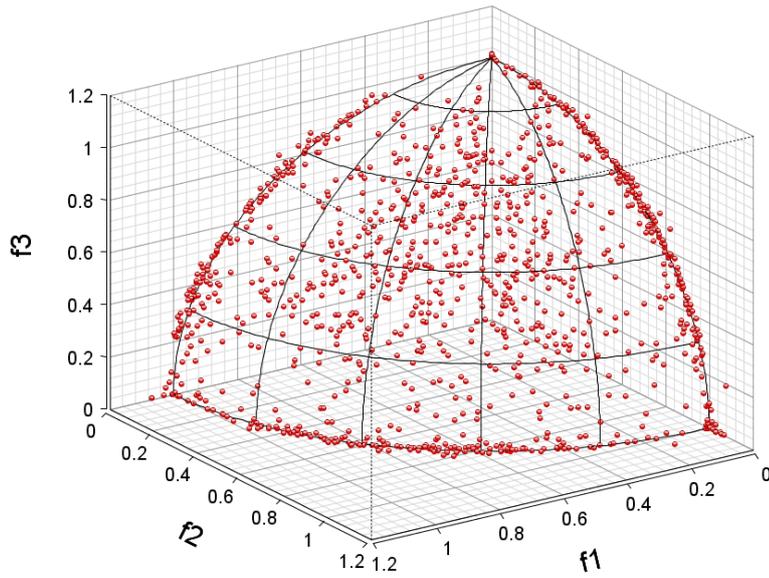


Abbildung 4.19: DTLZ2-Ergebnisse SMS-EMOA(50)

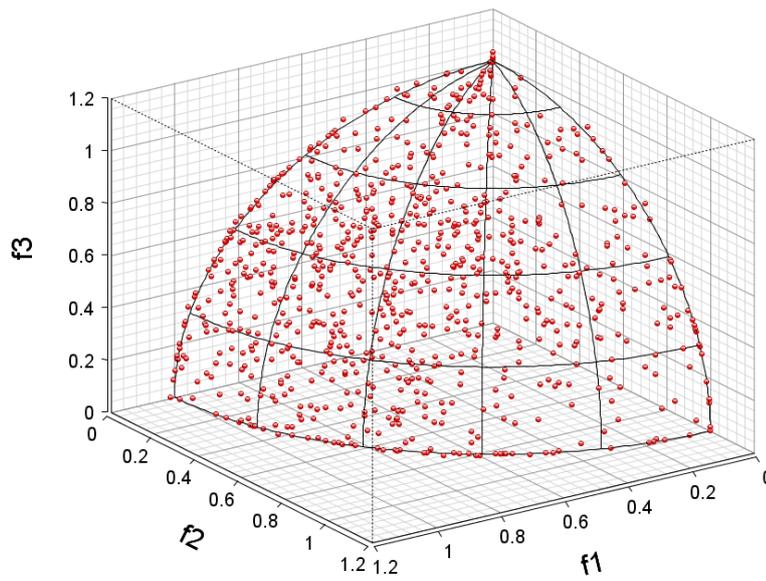


Abbildung 4.20: DTLZ2-Ergebnisse PGA(50)

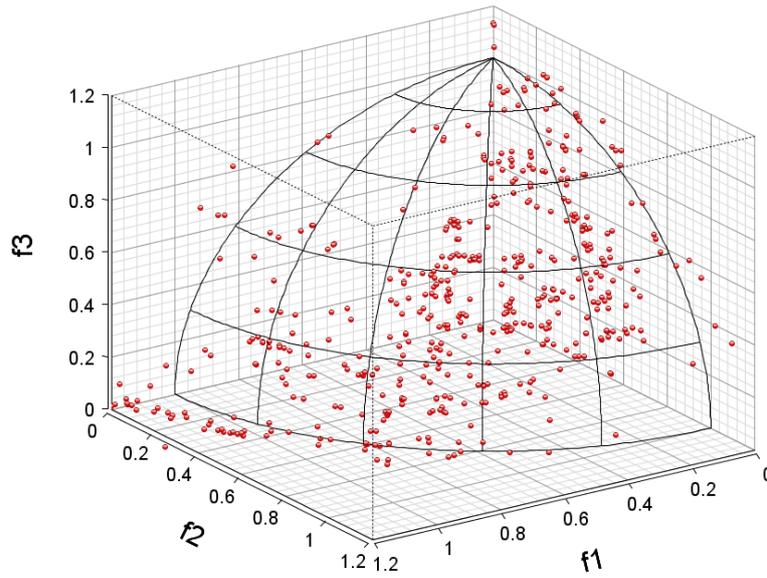


Abbildung 4.21: DTLZ2-Ergebnisse NSGA-II(50)

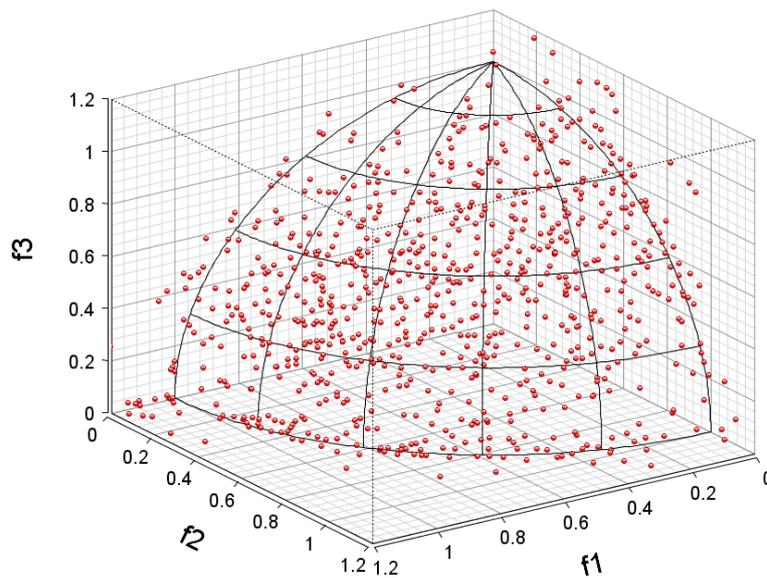


Abbildung 4.22: DTLZ2-Ergebnisse SPEA2(50)

4.3.3 DTLZ3

Die Schwierigkeit dieser Testaufgabe ist das Erreichen der globalen Pareto-Front. Diese Aufgabe entsteht aus DTLZ2 durch Ersetzen der g -Funktion durch die von DTLZ1. Bei dieser Aufgabe ist ein ähnliches Verhalten wie bei DTLZ1 zu erkennen. Der PGA(50)

erzielt bei allen Kriterien klar die besten Ergebnisse. Beim Hypervolumen und bei der Konvergenzmetrik ändert sich an den verhältnismäßig besten Lösungen im Vergleich mit denen aus DTLZ1 nicht viel, siehe dazu die Abbildung 4.23. Bei der Anzahl der Pareto-Punkte erzielt der NSGA-II(50) im Mittel mehr als beim DTLZ1-Problem und bei der Relativen Dominanz erzielt der NSGA-II(50) ebenfalls bessere Ergebnisse. Die Ergebnisplot sind auf den Abbildungen 4.24, 4.25, 4.26 und 4.27 zu finden.

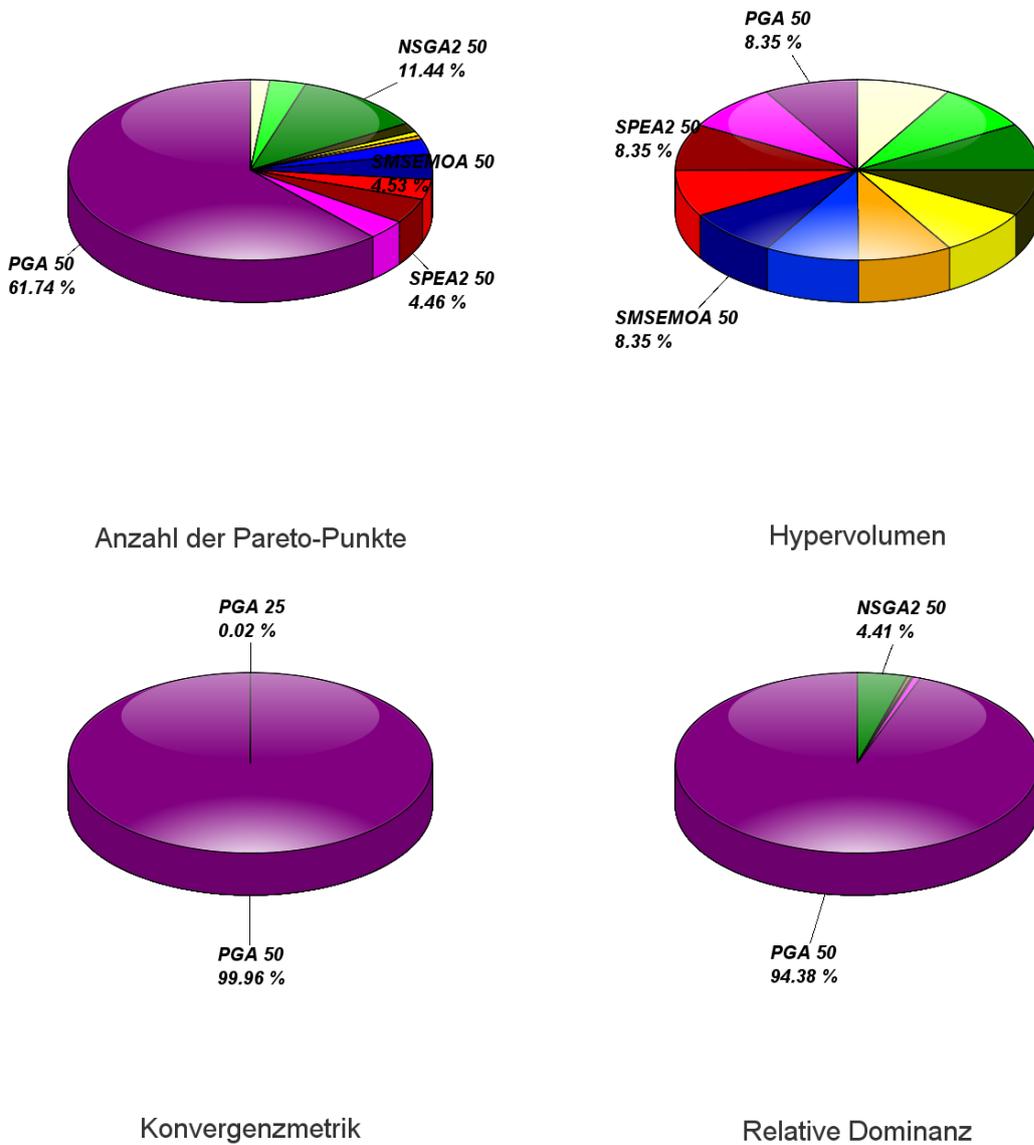


Abbildung 4.23: DTLZ3 Tortendiagramme

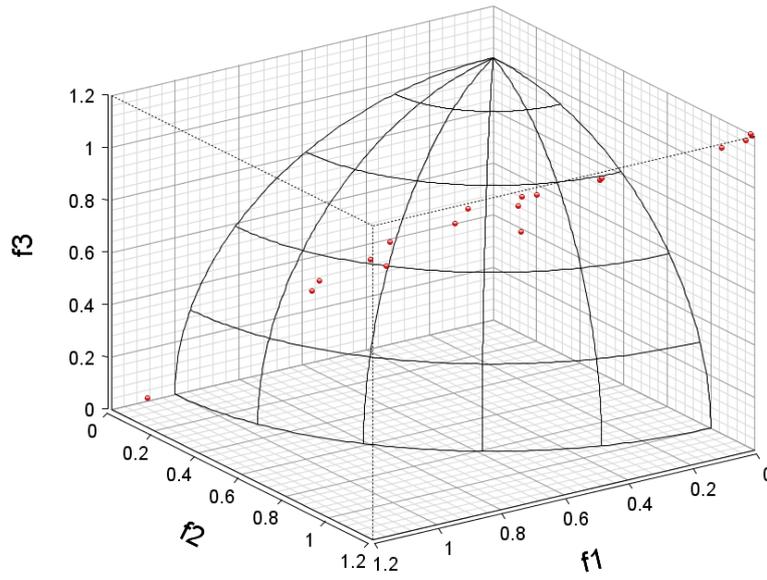


Abbildung 4.24: DTLZ3 Testergebnisse PGA(25)

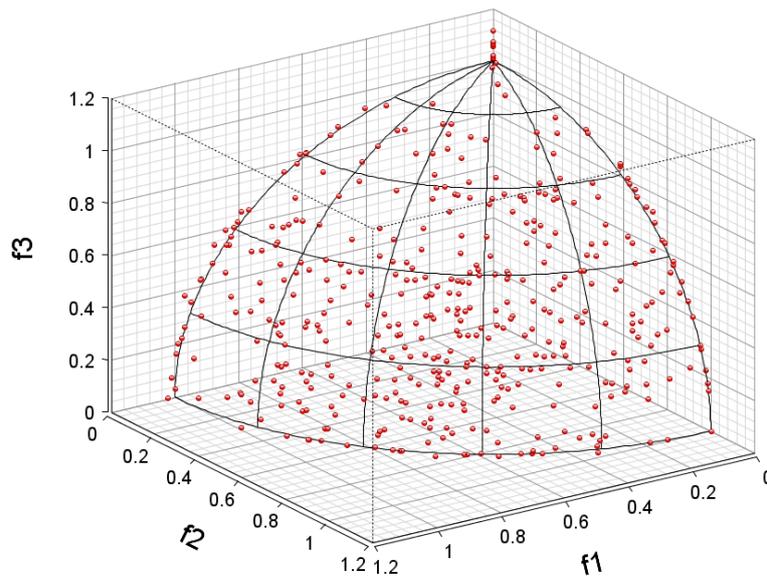


Abbildung 4.25: DTLZ3 Testergebnisse PGA(50)

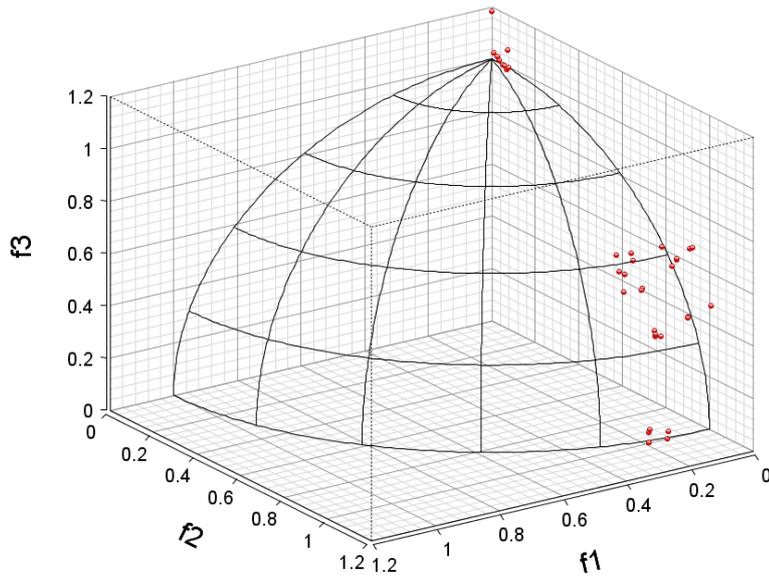


Abbildung 4.26: DTLZ3 Testergebnisse NSGA-II(50)

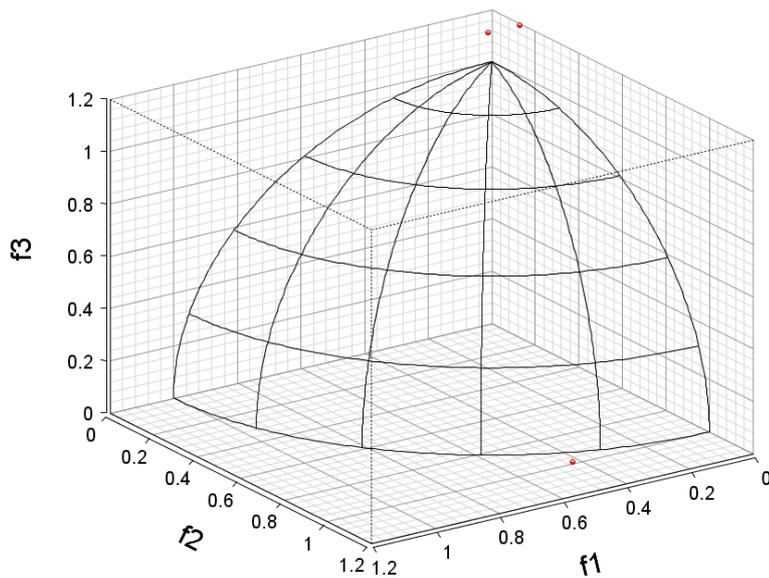


Abbildung 4.27: DTLZ3 Testergebnisse SMS-EMOA(50)

4.3.4 DTLZ4

Die Schwierigkeit bei diesem Testproblem ist, eine gute Verteilung der Lösungen auf der Pareto-Front zu finden, da durch den Exponent α der x_i , $i = 1, 2, \dots, M - 1$ bei den Zielfunktionen eine Verzerrung der Pareto-Front verursacht wird. Dadurch werden oft

nur Lösungen am Rand der Pareto-Front gefunden, wie man auch auf den Ergebnis-Plots sehen kann, siehe dazu die Abbildungen 4.29, 4.30, 4.31 und 4.32.

Am Besten schneidet bei dieser Aufgabe der SMS-EMOA(50) ab, der im Durchschnitt am meisten Pareto-Punkte ermittelt, die beste Bewertung beim Hypervolumen und der Relativen Dominanz erzielt. Nur bei der Konvergenzmetrik erreicht der PGA(50) einen besseren Wert als der SMS-EMOA(50), aber bei den anderen Kriterien schneidet der PGA(50) deutlich schlechter ab. Der SPEA2(50) liefert die zweitbesten Ergebnisse bei allen Kriterien, außer bei der Konvergenzmetrik. Die hohen Standardabweichungen aller Verfahren bei den Kriterien Anzahl der Pareto-Punkte, Hypervolumen und Relative Dominanz, lassen darauf schließen, dass oft nur Randpunkte gefunden werden. Die verhältnismäßig besten Lösungen sind in der Abbildung 4.28 dargestellt.

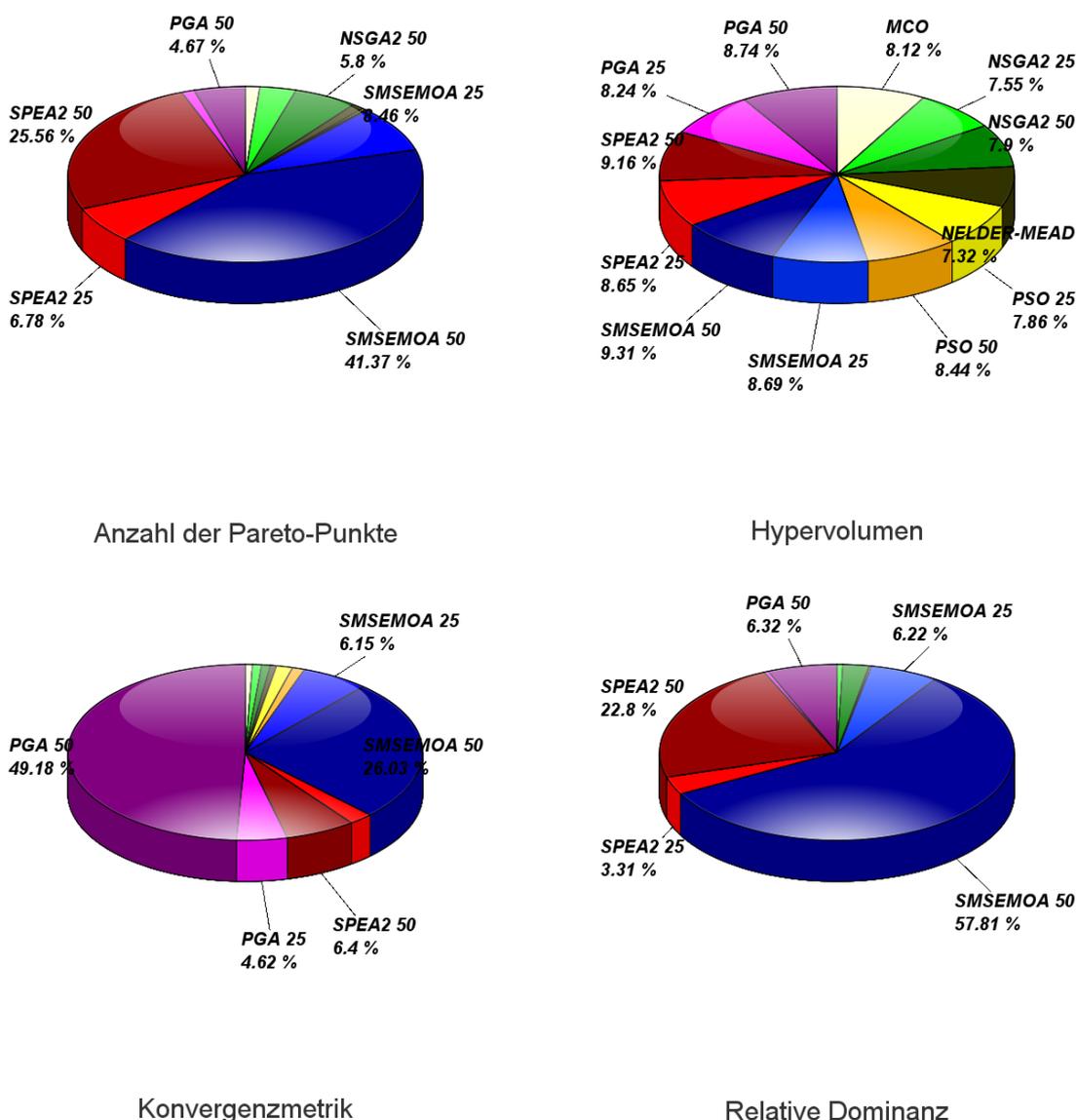


Abbildung 4.28: DTLZ4 Tortendiagramme

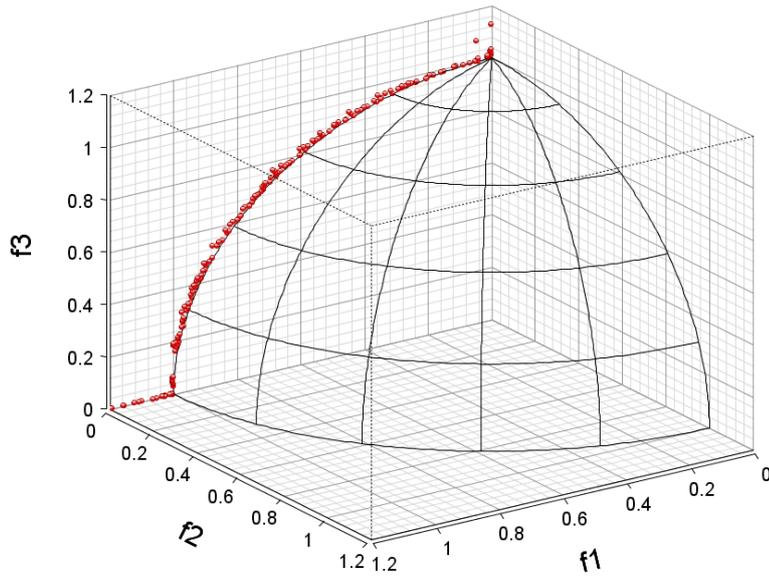


Abbildung 4.29: DTLZ4 Testergebnisse SMS-EMOA(25)

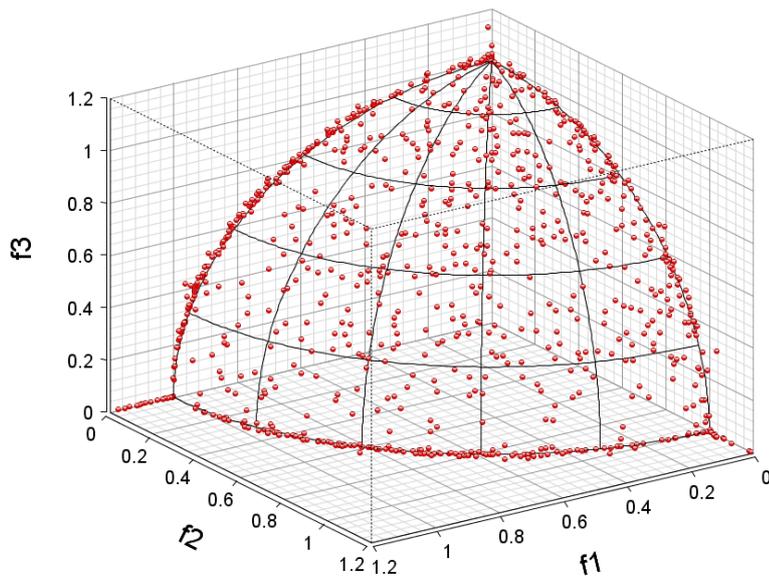


Abbildung 4.30: DTLZ4 Testergebnisse SMS-EMOA(50)

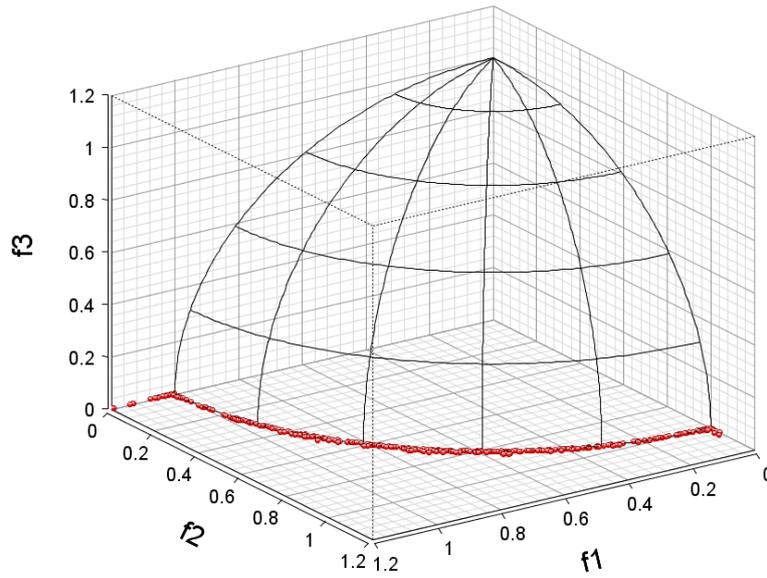


Abbildung 4.31: DTLZ4 Testergebnisse SPEA2(50)

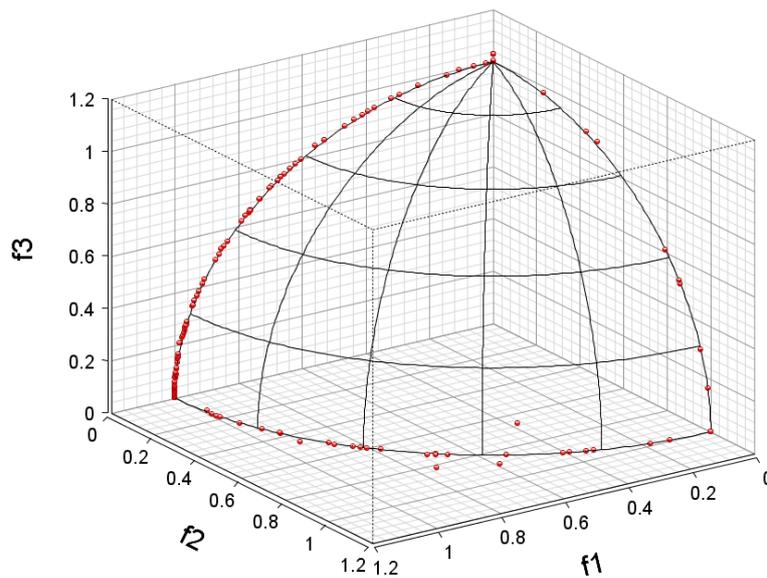


Abbildung 4.32: DTLZ4 Testergebnisse PGA(50)

4.3.5 DTLZ6

Das DTLZ6-Problem hat eine entartete Pareto-Front, die durch die Abbildung θ_i für $i = 1, \dots, M - 1$ entsteht und eine allgemeine Verzerrung des Zielbereiches, die durch den Exponenten 0.1 für die x_i für $i = M, \dots, N$ der g -Funktion zustande kommt. Dadurch

wird es für die Optimierungsverfahren erschwert, zur Pareto-Front zu konvergieren und zu erkennen, dass die Pareto-Front eine niedrigere Dimension als der Zielbereich hat.

Bei diesem Problem zeigt der PSO(50) einen Vorteil gegenüber den anderen Verfahren, konvergiert zuverlässig zur Pareto-Front und schafft es, diese am besten zu approximieren. Dies zeigt sich auch in den Auswertungskriterien, bei denen er bei allen deutlich die besten Ergebnisse erzielt, siehe dazu Abbildung 4.36. Der PGA(50) und PSO(25) schaffen es bei manchen Durchläufen, auch Lösungen auf der Pareto-Front zu finden, dabei ermitteln sie aber meist nur wenige Punkte der Pareto-Front. Dieses Verhalten ist auf Abbildung 4.35 und 4.33 dargestellt. Bei der Relativen Dominanz schneiden beide Verfahren nach dem PSO(50) am besten ab, beim Hypervolumen sowie bei der Konvergenzmetrik, erzielen sie nach dem PGA(50) und dem SMS-EMOA(50) die besten Ergebnisse.

Der SMS-EMOA erzielt zwar beim Hypervolumen und der Konvergenzmetrik die zweitbesten Werte, schafft es aber nicht, zur Pareto-Front zu konvergieren, wie man auch in Abbildung 4.37 erkennen kann. Die Konvergenz zur Pareto-Front wird auch von den restlichen Verfahren nicht erreicht. Die verhältnismäßigen besten Lösungen sind in der Abbildung 4.34 zu finden.

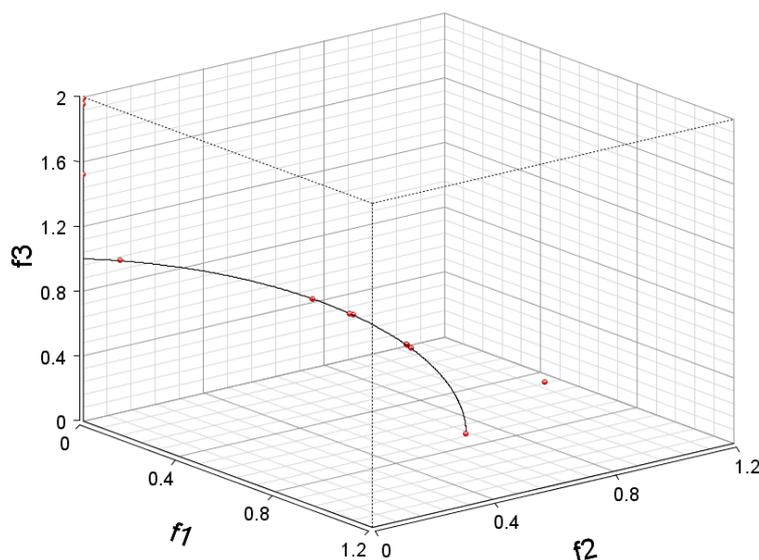


Abbildung 4.33: DTLZ6 Testergebnisse PGA(50)

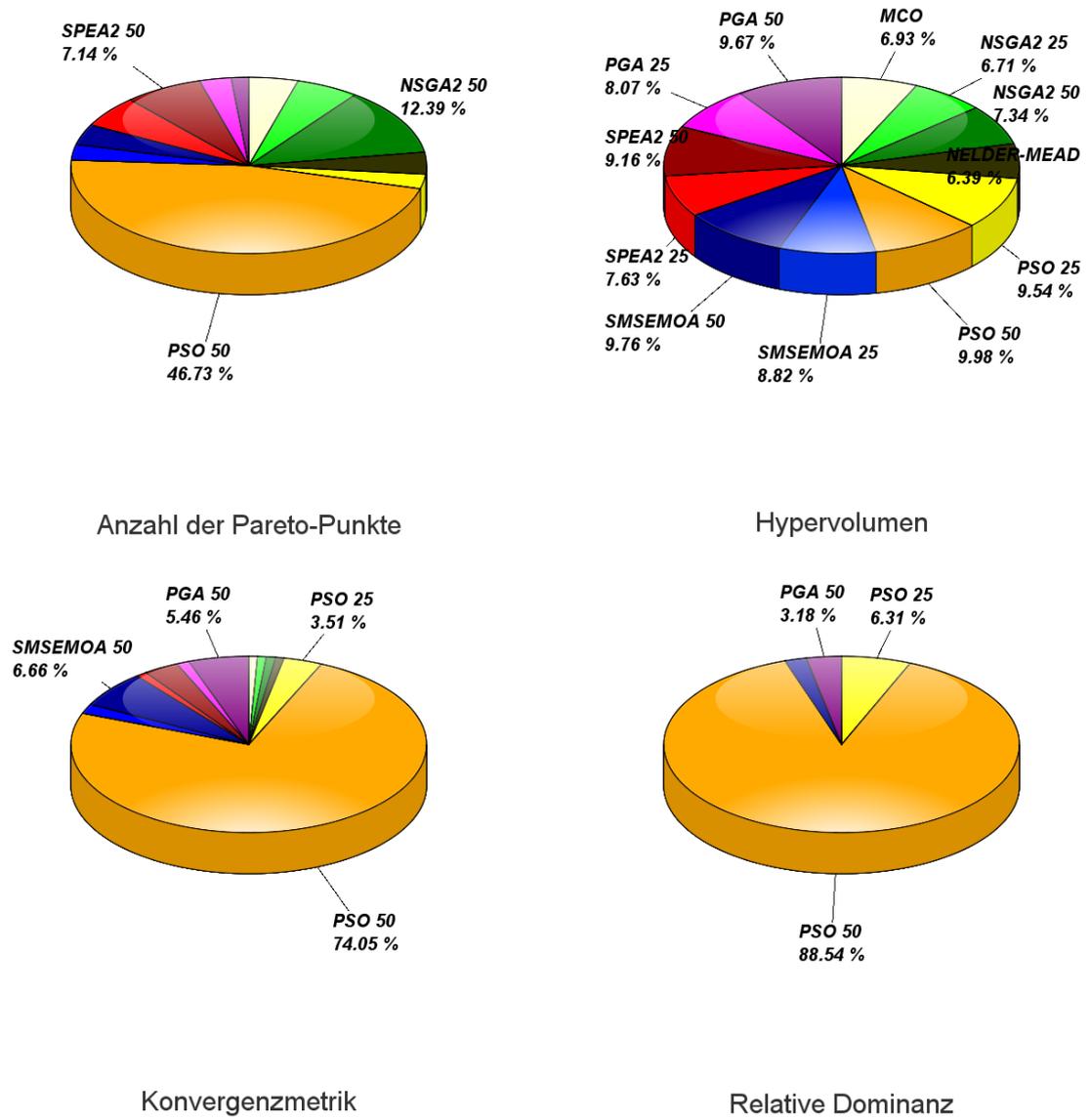


Abbildung 4.34: DTLZ6 Tortendiagramme

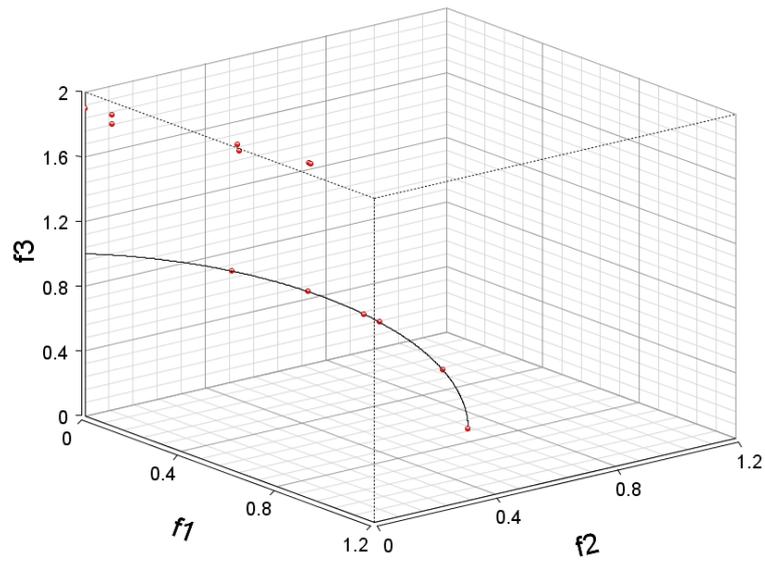


Abbildung 4.35: DTLZ6 Testergebnisse PSO(25)

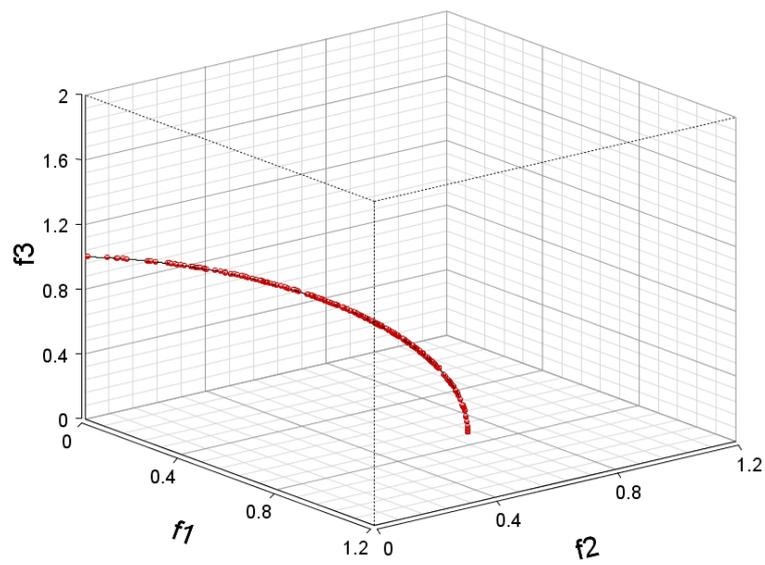


Abbildung 4.36: DTLZ6 Testergebnisse PSO(50)

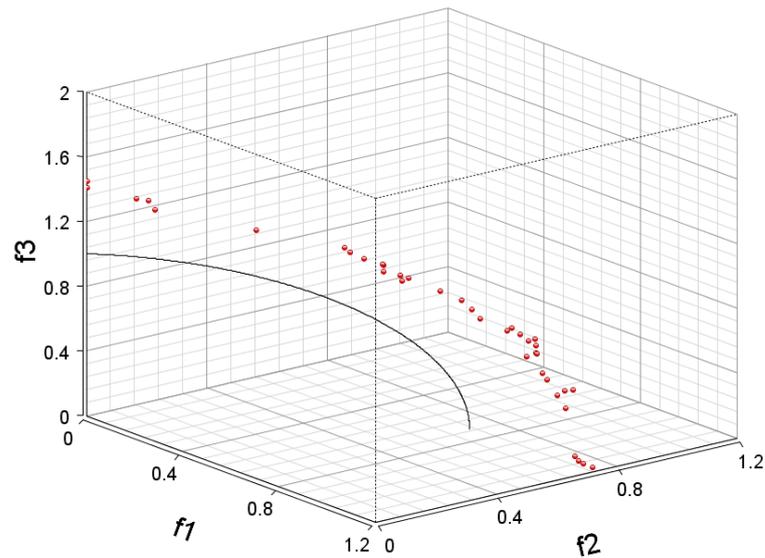
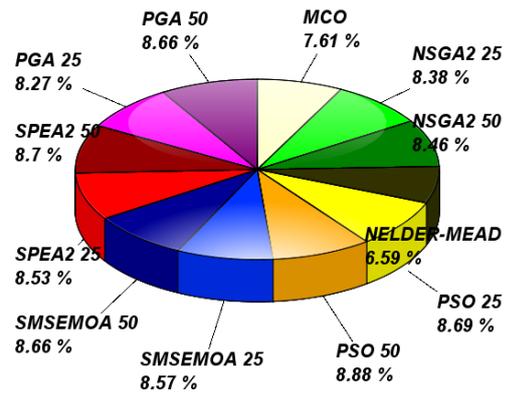
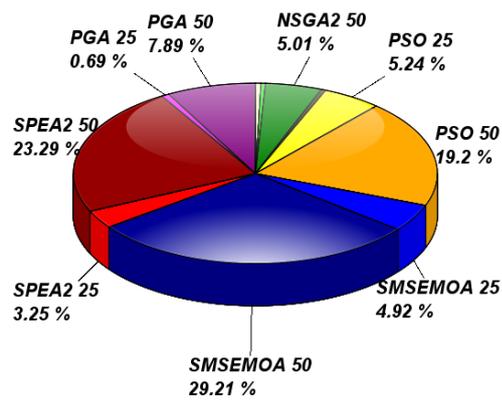


Abbildung 4.37: DTLZ6 Testergebnisse SMS-EMOA(50)

4.3.6 DTLZ7

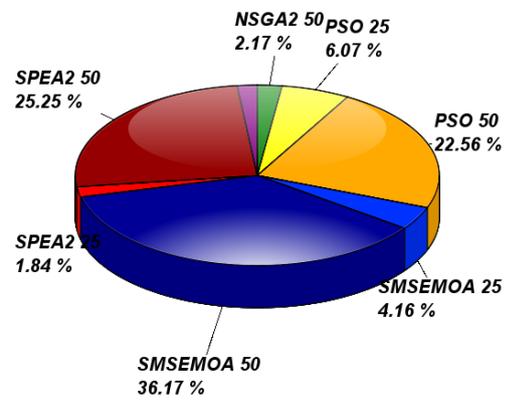
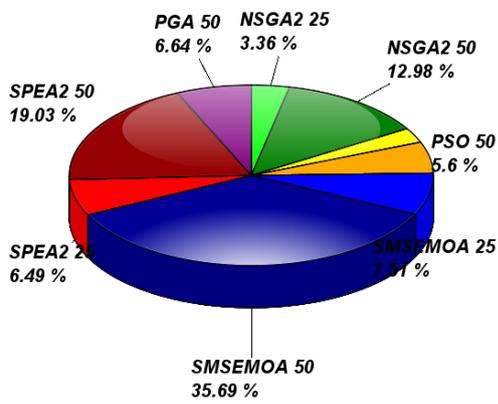
Bei diesem Problem ist die Herausforderung, alle Teile der nicht zusammenhängenden Pareto-Front zu ermitteln. Die meisten Lösungen werden im Bereich $x_1 \in [0, 0.2668]$, $x_2 \in [0, 0.2721]$ gefunden, der im folgenden mit Bereich 1 bezeichnet wird. Der PSO(50) findet bei den meisten Durchläufen Pareto-optimale Lösungen in allen Bereichen der Pareto-Front. Jedoch ermittelt er in den meisten Fällen Lösungen im 1. Bereich, die demzufolge auch eine bessere Ausbreitung haben als die Lösungen in den anderen Bereichen. Dieses Verhalten ist in Abbildung 4.40 zu sehen. Die beste Bewertung für das Hypervolumen erzielt ebenfalls PSO(50). Bei den anderen Kriterien schneidet das Verfahren aber nicht so gut ab. Er liegt bei der Anzahl der Pareto-Punkte und bei der relativen Dominanz hinter dem SMS-EMOA(50) und dem SPEA2(50). Bei der Konvergenzmetrik liefert er nur mittelmäßige Werte.

Der SMS-EMOA(50) erzielt bei allen Kriterien außer dem Hypervolumen die besten Ergebnisse. Die meisten gefundenen Pareto-optimale Lösungen liegen im 1. Bereich, wenn Lösungen aus anderen Bereichen der Pareto-Front gefunden werden, dann kann der SMS-EMOA(50) auch eine gute Ausbreitung in diesen Bereichen gewährleisten. Das wird in Abbildung 4.41 dargestellt. Der SPEA2(50) zeigt ein ähnliches Verhalten wie der SMS-EMOA(50), findet aber meist nur Pareto-Punkte im 1. Bereich. Bei allen Kriterien liefert er die zweitbesten Ergebnisse. Die verhältnismäßig besten Lösungen sind in der Abbildung 4.38 dargestellt. Die noch nicht erwähnten Ergebnis-Plots befinden sich in den Abbildungen 4.39 und 4.42.



Anzahl der Pareto-Punkte

Hypervolumen



Konvergenzmetrik

Relative Dominanz

Abbildung 4.38: DTLZ7 Tortendiagramme

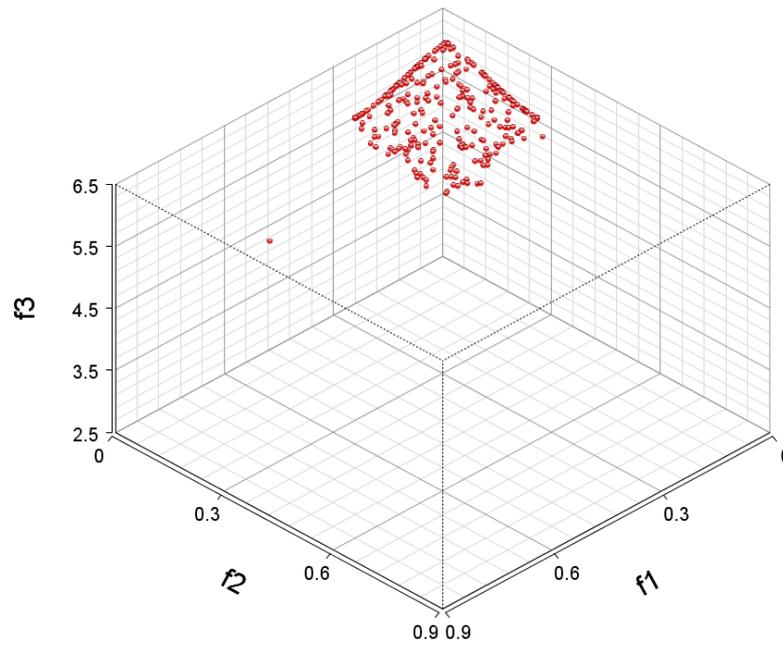


Abbildung 4.39: DTLZ7 Testergebnisse PSO(25)

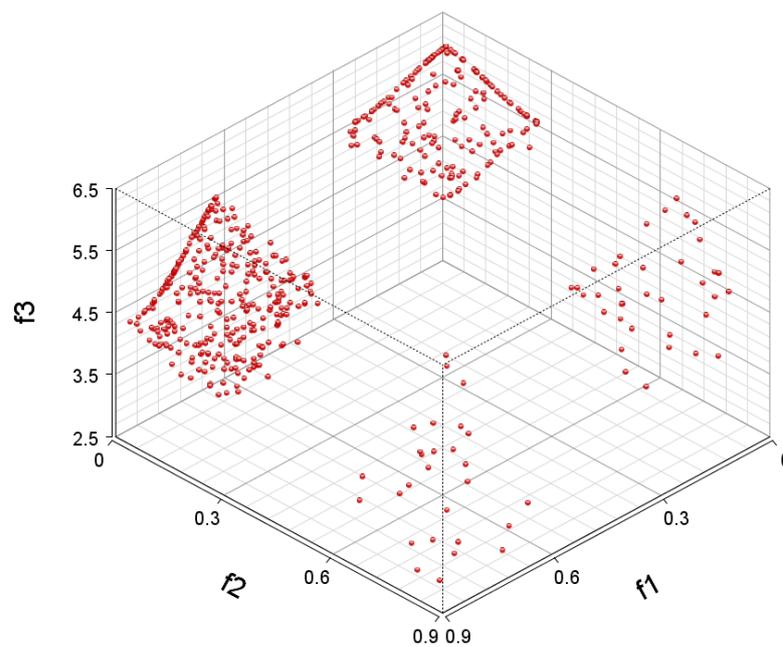


Abbildung 4.40: DTLZ7 Testergebnisse PSO(50)

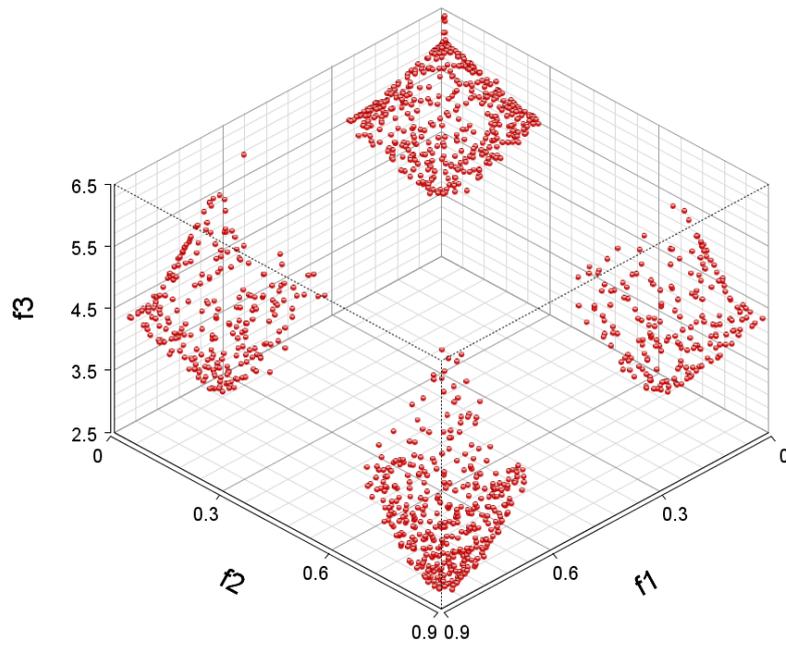


Abbildung 4.41: DTLZ7 Testergebnisse SMS-EMOA(50)

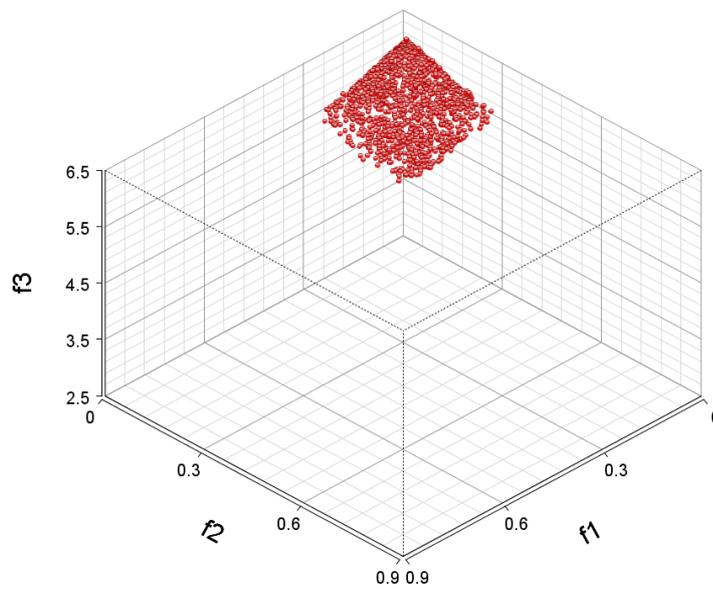


Abbildung 4.42: DTLZ7 Testergebnisse SPEA2(50)

4.4 Aufgaben mit Nebenbedingungen

Die Aufgaben C1-DTLZ1¹⁴ und C3-DTLZ1¹⁵ wurden jeweils mit 3 Zielen und 6 Parametern ausgeführt. Die Aufgaben C2-DTLZ2¹⁶ und C3-DTLZ4¹⁷ wurden ebenfalls mit 3 Zielen, aber nur mit 5 Parametern ausgeführt.

4.4.1 C1-DTLZ1

Die Herausforderung beim C1-DTLZ1-Problem besteht darin, zulässige Lösungen zu finden. Das wird durch die Multimodalität und die Nebenbedingung, die den zulässigen Bereich stark einschränkt, erschwert. Das einzige Verfahren, das zuverlässig zulässige Lösungen ermitteln konnte, ist der PGA(50). Das spiegelt sich auch in den Auswertungskriterien wieder, bei denen das Verfahren deutlich am besten bewertet wird. Die verhältnismäßigen Ergebnisse sind in der Abbildung 4.43 dargestellt. Bei 99 von 100 Durchläufen wurden beim PGA(50) zulässige Lösungen gefunden. Der PSO(50) konnte bei 62 Durchläufen zulässige Lösungen finden, jedoch meist nur einzelne nah beieinander liegende Lösungen. Dies bestätigen auch die Ergebnisse der ermittelten Pareto-Punkte, des Hypervolumens und der Relativen Dominanz, die im Vergleich zum PGA(50) deutlich schlechter ausfallen.

Die Anzahl der Durchläufe mit zulässigen Lösungen sind im Anhang in Tabelle A.45 enthalten und werden dort als erfolgreiche Durchläufe bezeichnet. Die restlichen Verfahren waren weniger erfolgreich und ermittelten in deutlich weniger Durchläufen zulässige Lösungen, die bei den Auswertungskriterien ebenfalls schlechter abschneiden, als die beiden vorher genannten Verfahren. Die einzige Ausnahme ist die Anzahl Pareto-Punkte. Bei diesem Kriterium haben der NSGA(50) und der PGA(25) im Durchschnitt mehr Pareto-Punkte gefunden als der PSO(50). Die Punkt-Plots der Testergebnisse sind in den Abbildungen 4.46, 4.45 und 4.44 zu finden, wobei je eine Menge von Lösungen für einen Durchlauf der Verfahren PGA(25), PGA(50) und PSO(50) dargestellt wird.

¹⁴ siehe Anhang A.10 für die Auswertungs-Tabellen

¹⁵ siehe Anhang A.12 für die Auswertungs-Tabellen

¹⁶ siehe Anhang A.11 für die Auswertungs-Tabellen

¹⁷ siehe Anhang A.13 für die Auswertungs-Tabellen

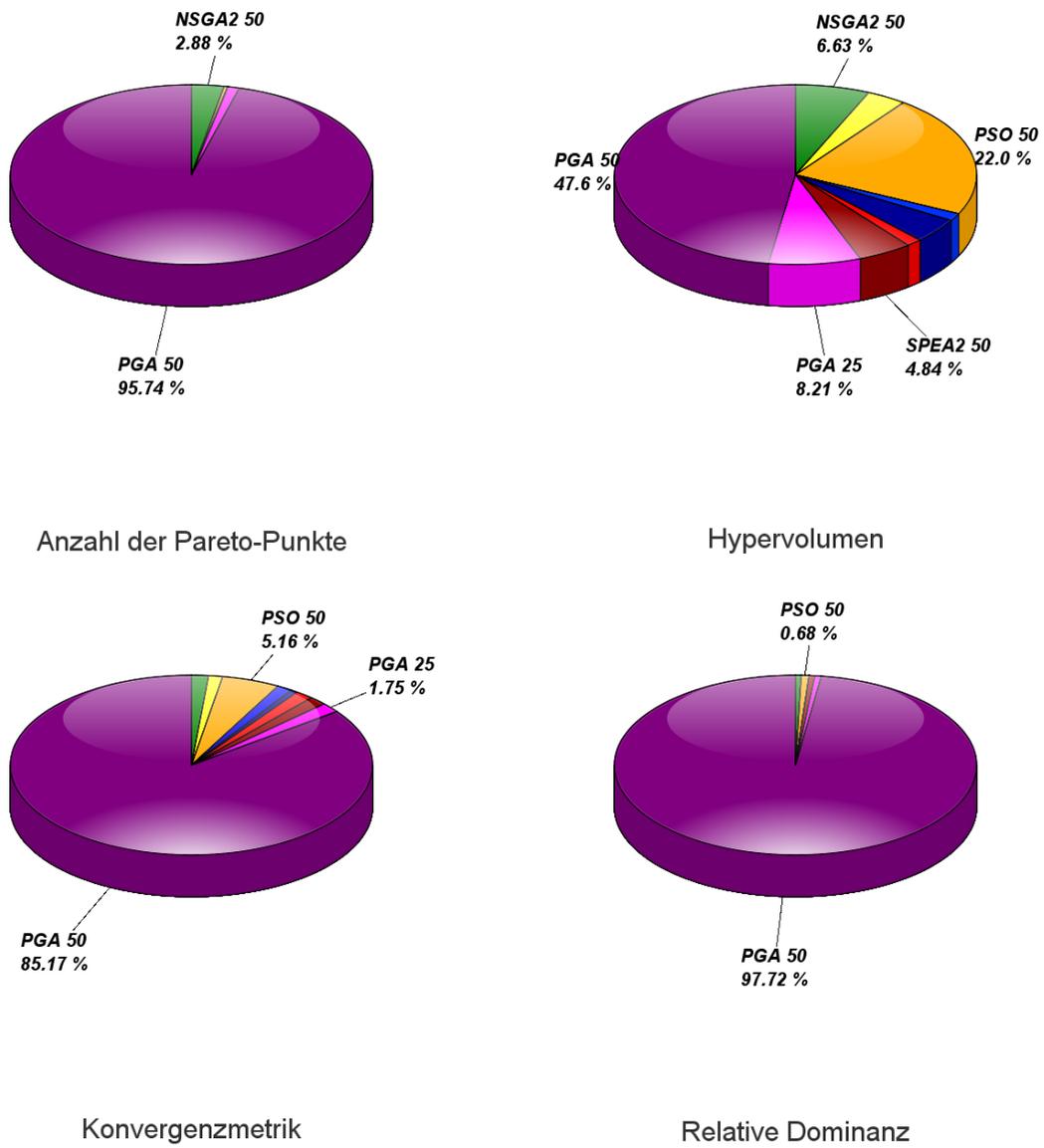


Abbildung 4.43: C1-DTLZ1 Tortendiagramme

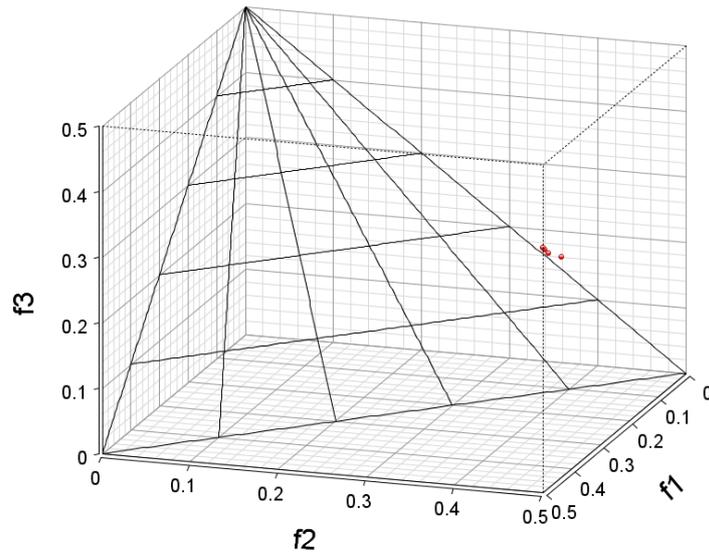


Abbildung 4.44: C1-DTLZ1 TestergebnissePSO(50)

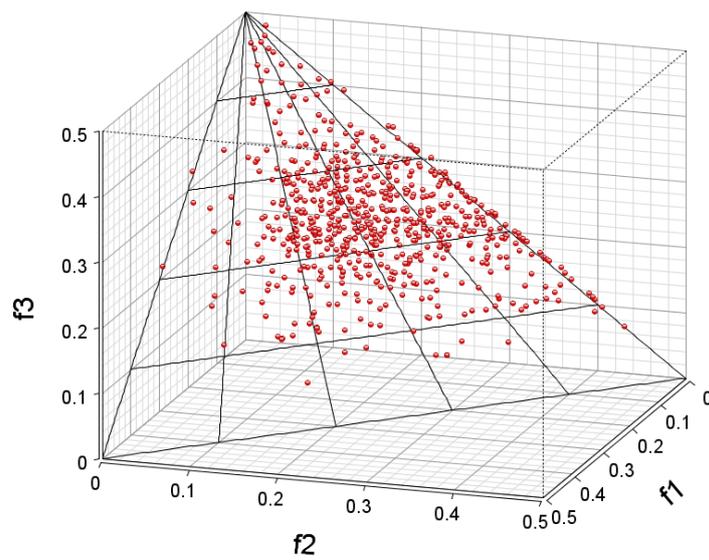


Abbildung 4.45: C1-DTLZ1 TestergebnissePGA(50)

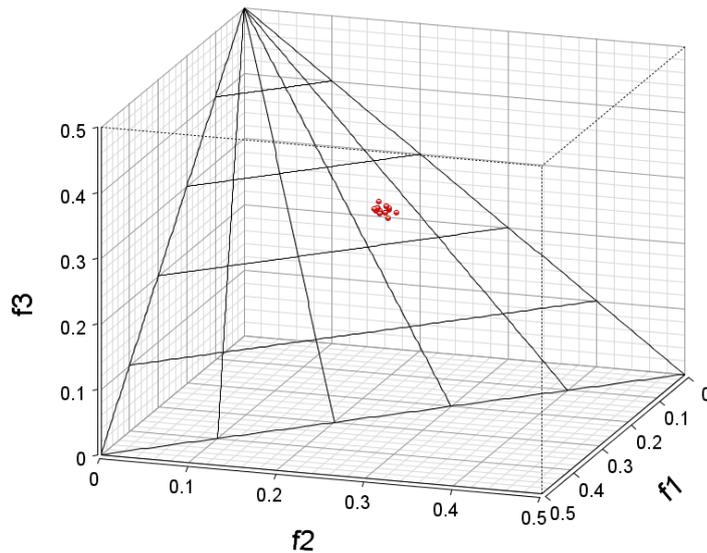


Abbildung 4.46: C1-DTLZ1 TestergebnissePGA(25)

4.4.2 C2-DTLZ2

Bei dieser Aufgabe wird getestet, wie gut die Verfahren damit umgehen können, wenn ein Teil der Pareto-Front des Problems nicht mehr zulässig ist. Am besten haben bei dieser Aufgabe der SMS-EMOA(50) und der PGA(50) abgeschnitten, die bei allen Kriterien entweder die besten oder zweitbesten Bewertungen erhalten haben. Der SMS-EMOA(50) ermittelt im Durchschnitt mehr Pareto-Punkte. Er schneidet auch beim Hypervolumen und bei der Relativen Dominanz besser ab. Der PGA(50) wird dafür bei der Konvergenzmetrik besser bewertet als der SMS-EMOA(50). Die Ergebnisse des Hypervolumen-Kriteriums liegen für alle Verfahren ziemlich nah beieinander. Der SMS-EMOA(25) hat beim Hypervolumen und bei der Konvergenzmetrik die drittbesten Ergebnisse geliefert, er liegt bei der Relativen Dominanz hinter dem NSGA-II(50).

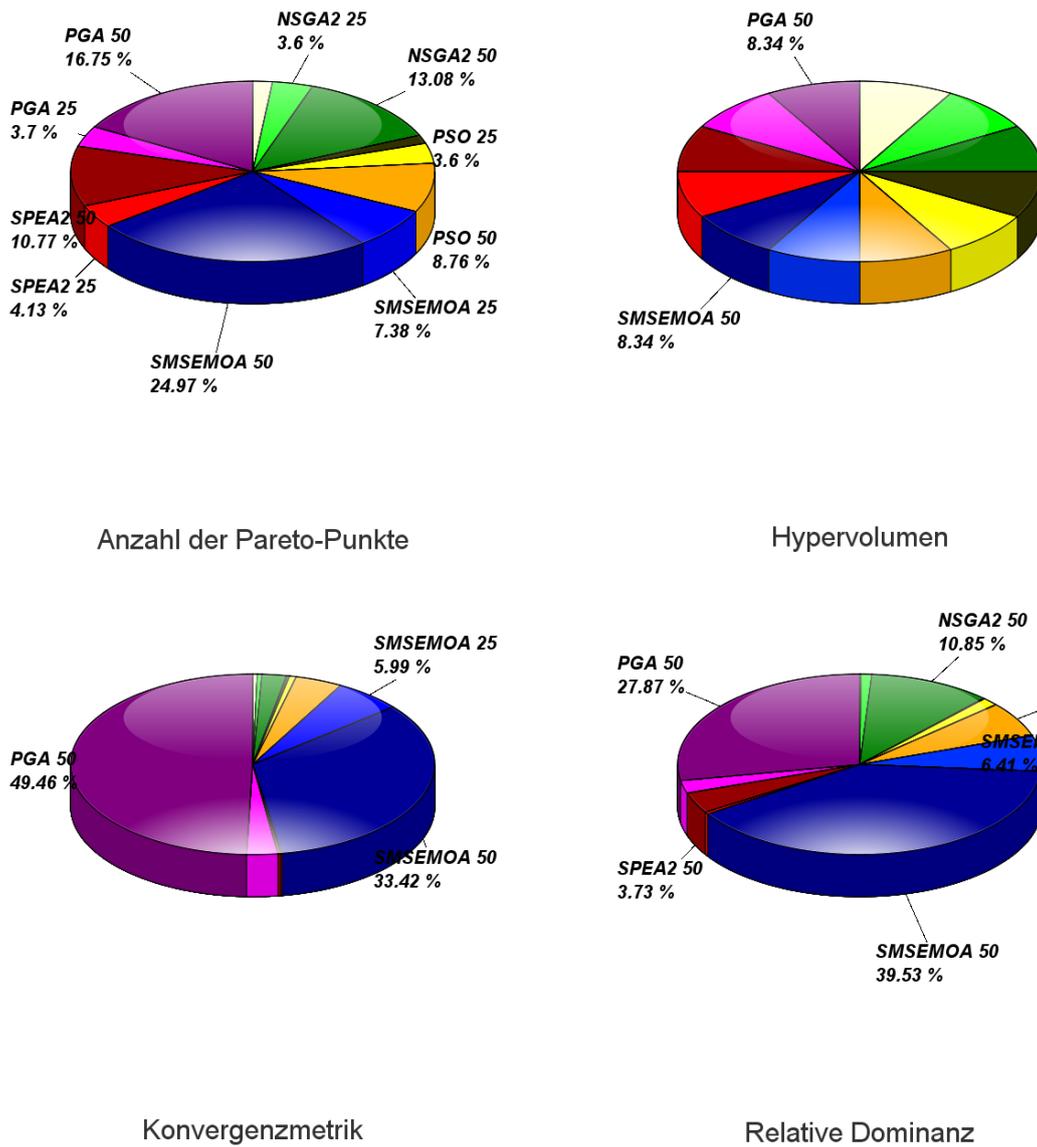


Abbildung 4.47: C2-DTLZ2 Tortendiagramme

Der NSGA-II(50) ermittelt im Durchschnitt auch mehr Pareto-Punkte als der SMS-EMOA(25). Auffällig ist auch, dass der SPEA2 mit beiden Parametrisierungen bei der Konvergenzmetrik hinter den beiden Referenzverfahren liegt, bei den anderen Kriterien aber besser als die Referenzverfahren abschneidet. Die verhältnismäßig besten Ergebnisse sind in der Abbildung 4.47 zu finden. Die Ergebnis-Plots werden in den Abbildungen 4.48, 4.49 und 4.50 dargestellt.

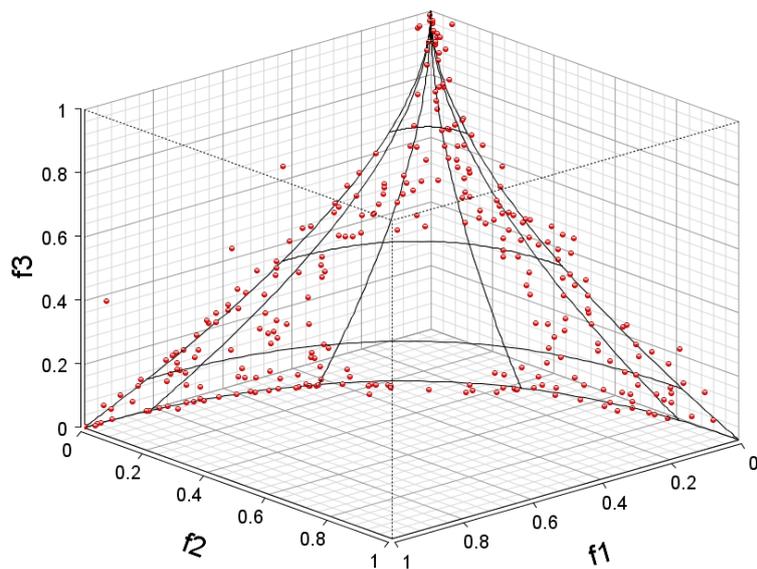


Abbildung 4.48: C2-DTLZ2 Testergebnisse SMS-EMOA(25)

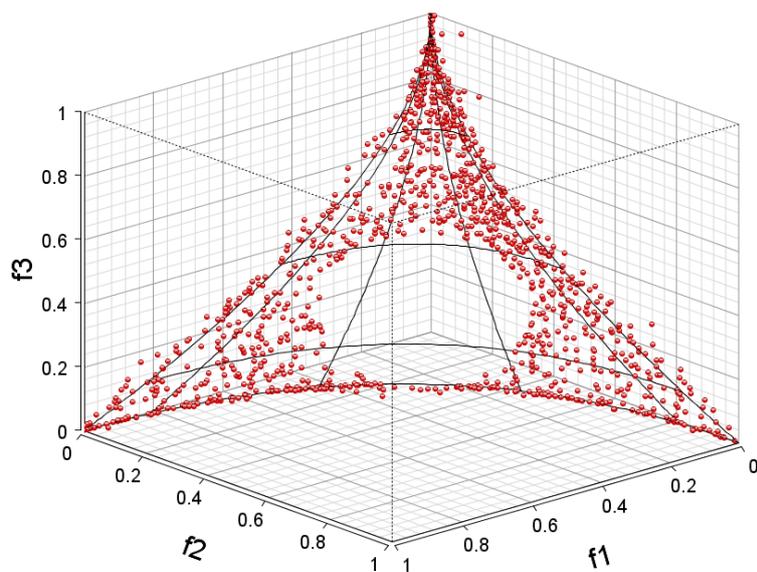


Abbildung 4.49: C2-DTLZ2 Testergebnisse SMS-EMOA(50)

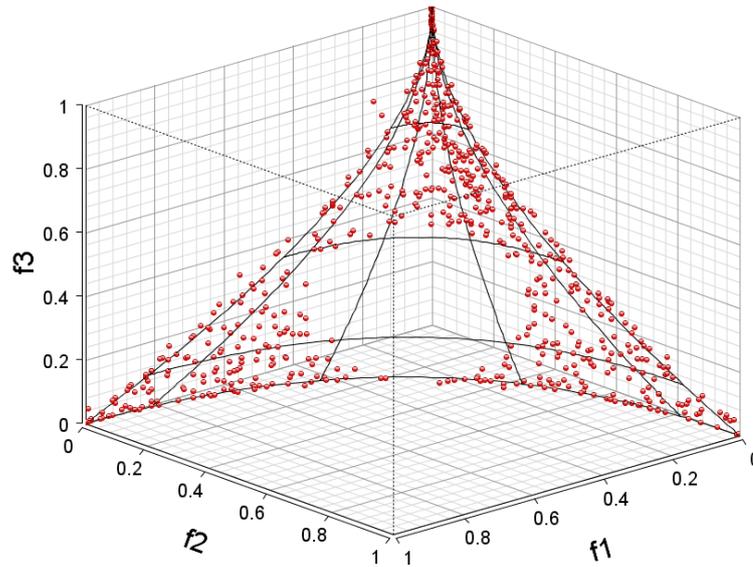


Abbildung 4.50: C2-DTLZ2 Testergebnisse PGA(50)

4.4.3 C3-DTLZ1

Bei der C3-DTLZ1-Aufgabe besteht die Schwierigkeit darin, zur Pareto-Front zu konvergieren, die auf einem Teil der Vereinigung der Nebenbedingungen liegt. Dieses Problem ist zusätzlich noch multimodal. Wie bei den vorherigen DTLZ1-Problemen liefert der PGA(50) die besten Ergebnisse in allen Kriterien und schafft es, die Pareto-Front am besten zu approximieren. Wie man in Abbildung 4.53 sehen kann, findet der PGA(50) Lösungen auf der ganzen Pareto-Front.

Die restlichen Verfahren finden meist nur wenige Punkte auf der Pareto-Front oder konvergieren nicht, wie man in Abbildung 4.51 an dem Verhältnis der Relativen Dominanz und der Konvergenzmetrik der Verfahren im Gegensatz zum PGA schließen kann. Die verhältnismäßigen Ergebnisse für das Hypervolumen sind aufgrund der hohen Werte nicht sehr aussagekräftig. Der NSGA-II(50) liefert bei der Relativen Dominanz und bei der Anzahl der Pareto-Punkte die zweitbesten Ergebnisse, schneidet aber bei der Konvergenzmetrik eher schlecht ab. Der PGA(25) liefert die zweitbesten Ergebnisse bei der Konvergenzmetrik, die aber im Vergleich mit Ergebnissen des PGA(50) auch eher schlecht ausfallen. Die Testergebnisse sind auf den Abbildungen 4.53, 4.52 und 4.54 zu finden.

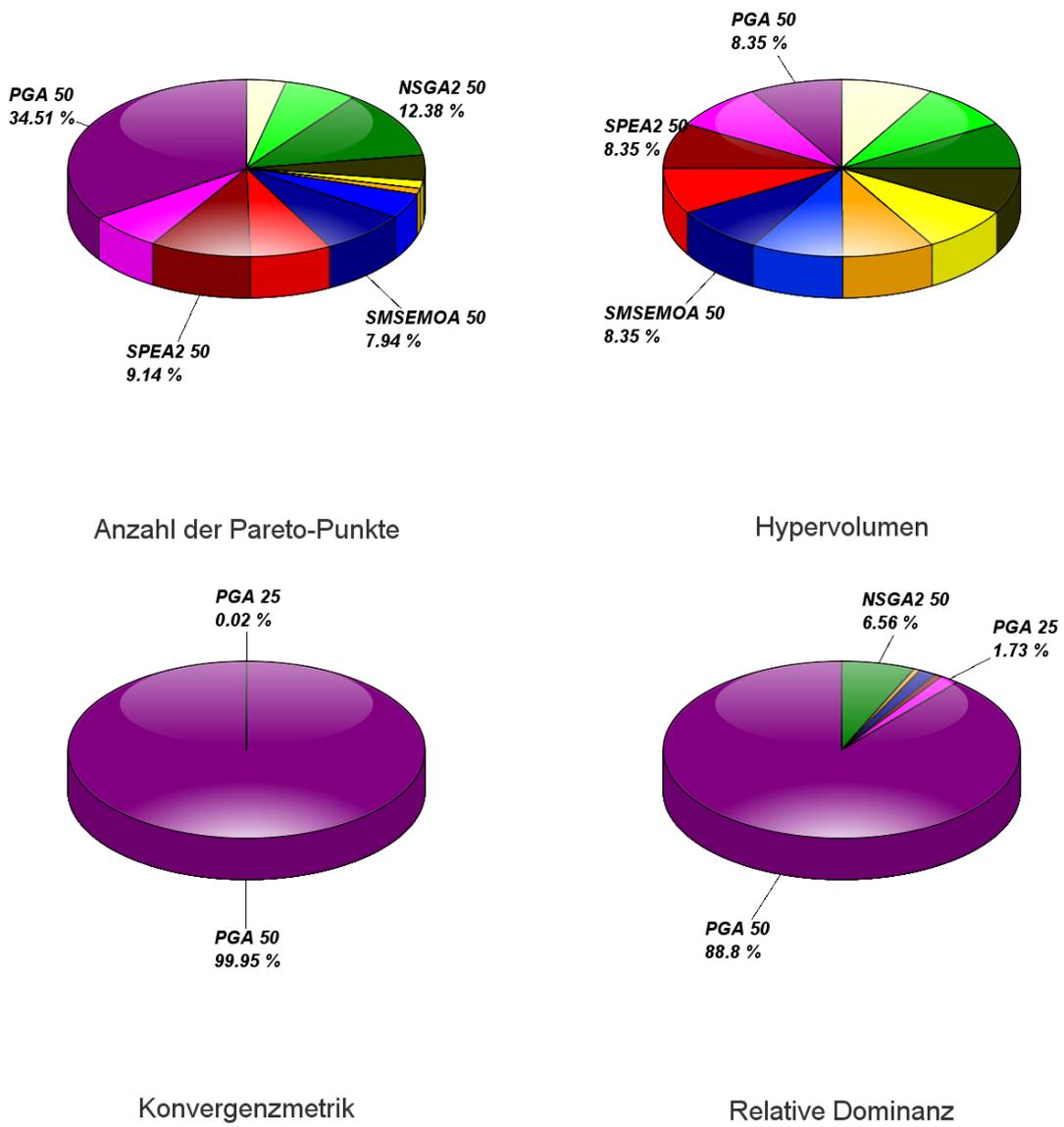


Abbildung 4.51: C3-DTLZ1 Tortendiagramme

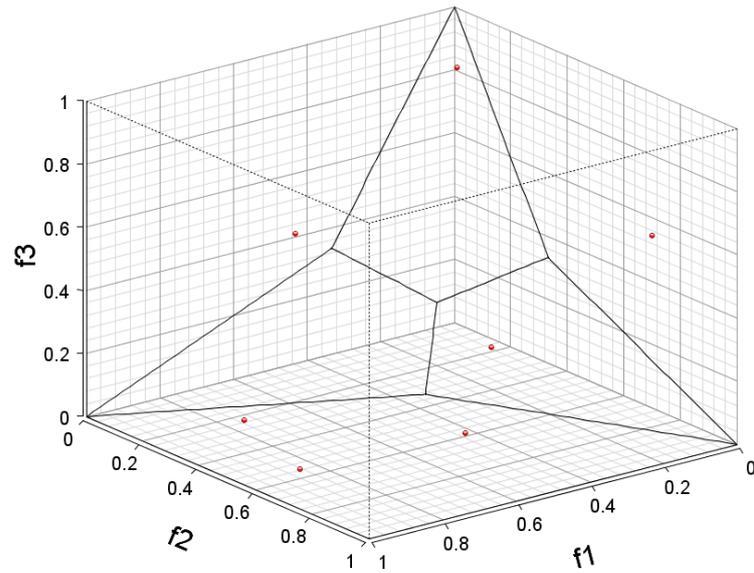


Abbildung 4.52: C3-DTLZ1 Testergebnisse PGA(25)

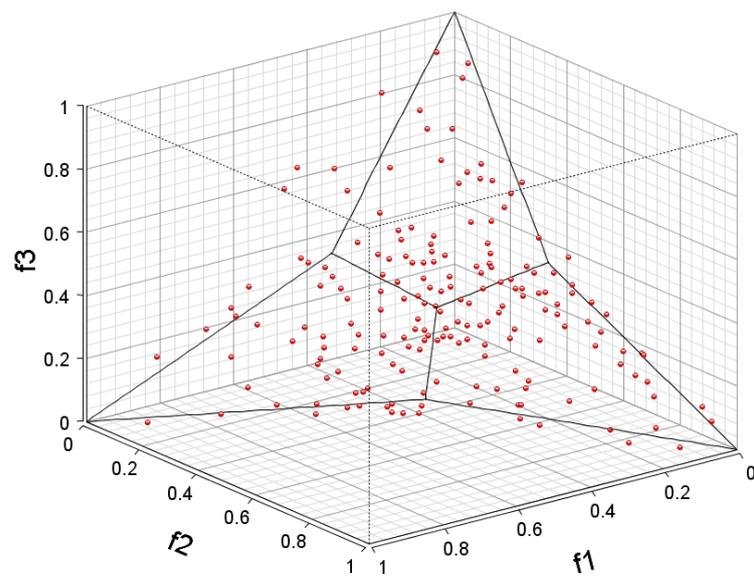


Abbildung 4.53: C3-DTLZ1 Testergebnisse PGA(50)

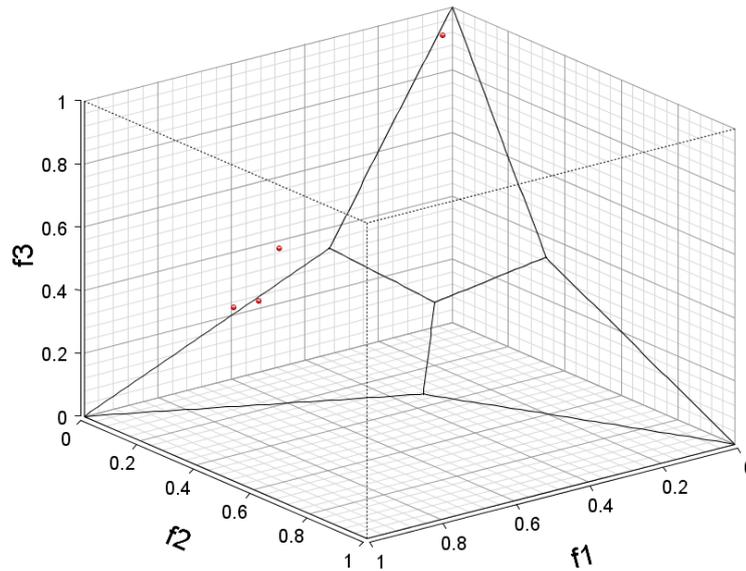


Abbildung 4.54: C3-DTLZ1 Testergebnisse NSGA-II(50)

4.4.4 C3-DTLZ4

Bei dieser Testaufgabe liegt die Pareto-Front, wie bei C3-DTLZ1, auf den Nebenbedingungen. Dazu kommt noch die Verzerrung in der Pareto-Front, wodurch oft nur Punkte auf dem Rand gefunden werden. In einigen Durchläufen hat ein Teil der Verfahren keine zulässigen Lösungen gefunden. Die Anzahl der Durchläufe mit zulässigen Lösungen findet sich in Tabelle A.57 und wird mit erfolgreiche Durchläufe bezeichnet.

Am besten schneidet bei dieser Aufgabe der SPEA2(50) ab, der bei der Relativen Dominanz und bei der Konvergenzmetrik am besten bewertet wurde und beim Hypervolumen und bei der Anzahl der Pareto-Punkte am zweitbesten abschneidet. Der SMS-EMOA(50) liefert ähnlich gute Ergebnisse und schneidet beim Hypervolumen am besten ab und bei der Relativen Dominanz und bei der Konvergenzmetrik erzielt der SMS-EMOA(50) die zweitbesten Bewertungen. Jedoch liegt er bei der Anzahl der Pareto-Punkte hinter dem NSGA-II(50) und dem SPEA2(50). Der SPEA(50) und der SMS-EMOA(50) haben keine Schwierigkeiten mit der Verzerrung, was man an den Minimalwerten und der Standardabweichung für das Hypervolumen erkennen kann. Außerdem haben nur der SPEA2(50), der SMS-EMOA(50) und der PGA(50) bei allen Durchläufen zulässige Punkte ermittelt.

Am meisten Pareto-Punkte hat der NSGA-II(50) gefunden und in der Relativen Dominanz erzielt er nach dem SPEA2(50) und dem SMS-EMOA(50) die besten Ergebnis-

se. Beim Hypervolumen ist die Standardabweichung deutlich höher als beim SPEA2 und beim SMS-EMOA2. Er erzielte in 99 Durchläufen zulässige Punkte, woraus man schließen kann, dass der NSGA2(50) in manchen Durchläufen nur Punkte am Rand der Pareto-Front gefunden hat. Besondere Schwierigkeiten hatte der PGA(50) die Verzerung der Pareto-Front zu bezwingen. Er fand in allen Durchläufen zulässige Lösungen, weist aber dafür eine ziemlich große Standardabweichung beim Hypervolumen auf. Die Testergebnisse werden in den Abbildungen 4.56, 4.57 und 4.58 dargestellt. Die verhältnismäßig besten Ergebnisse sind in Abbildung 4.55 zu finden.

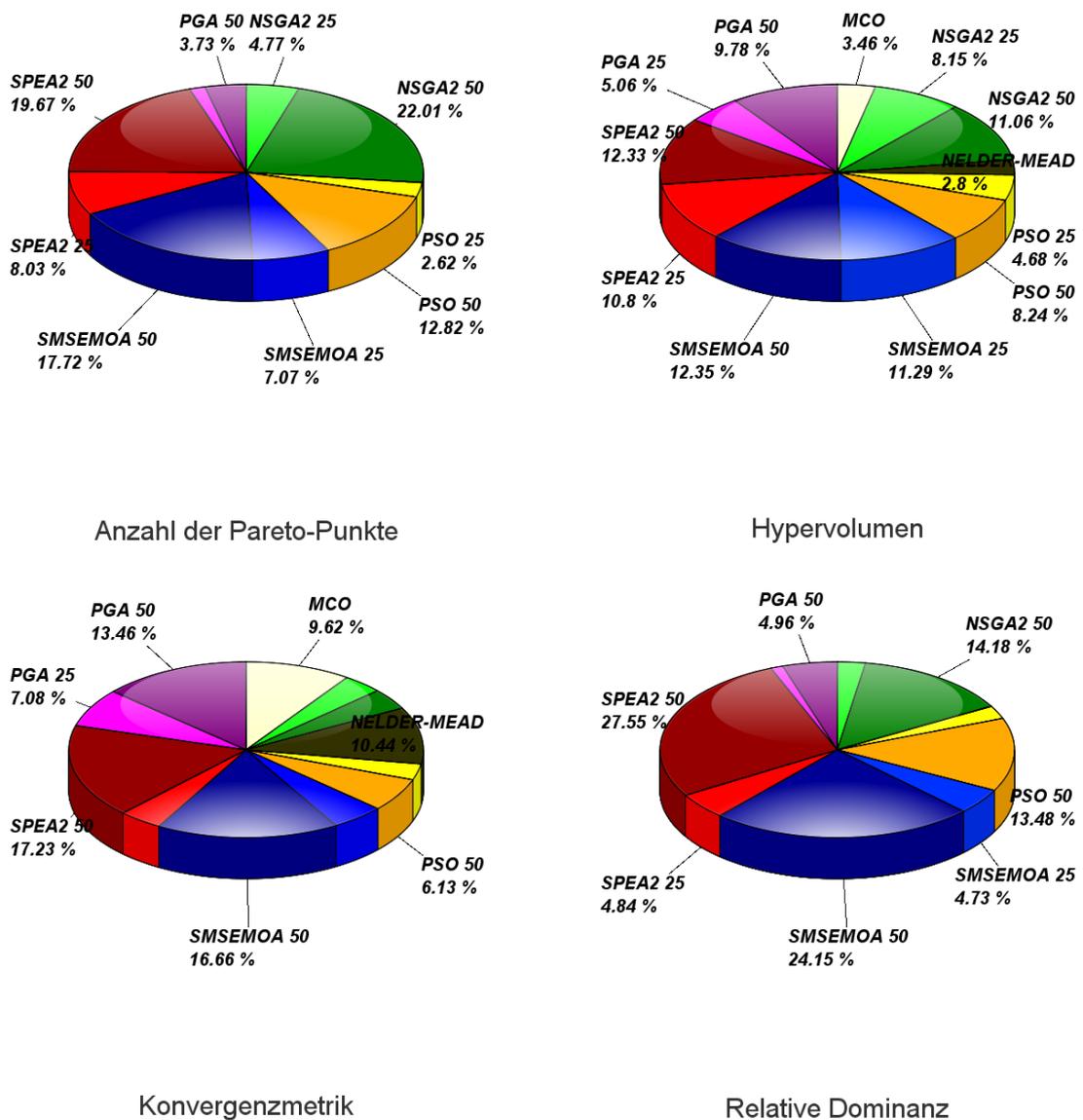


Abbildung 4.55: C3-DTLZ4 Tortendiagramme

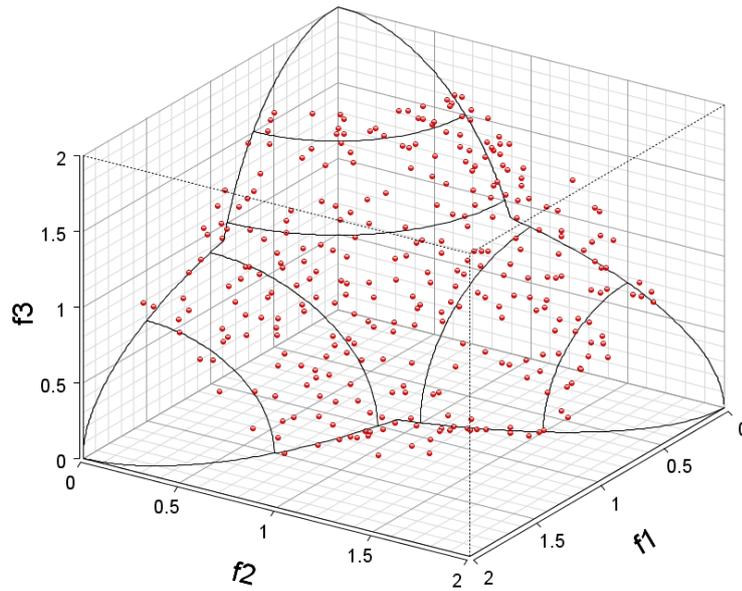


Abbildung 4.56: C3-DTLZ4 Ergebnisse SPEA2(50)

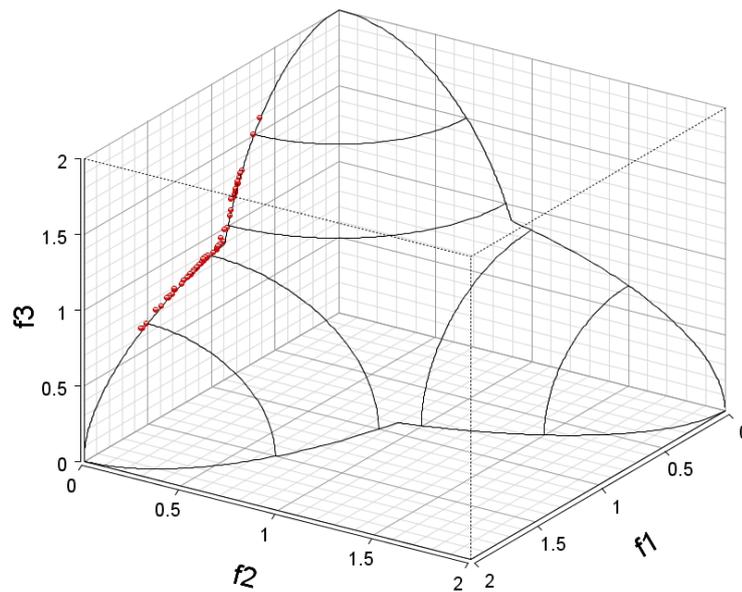


Abbildung 4.57: C3-DTLZ4 Ergebnisse PSO(50)

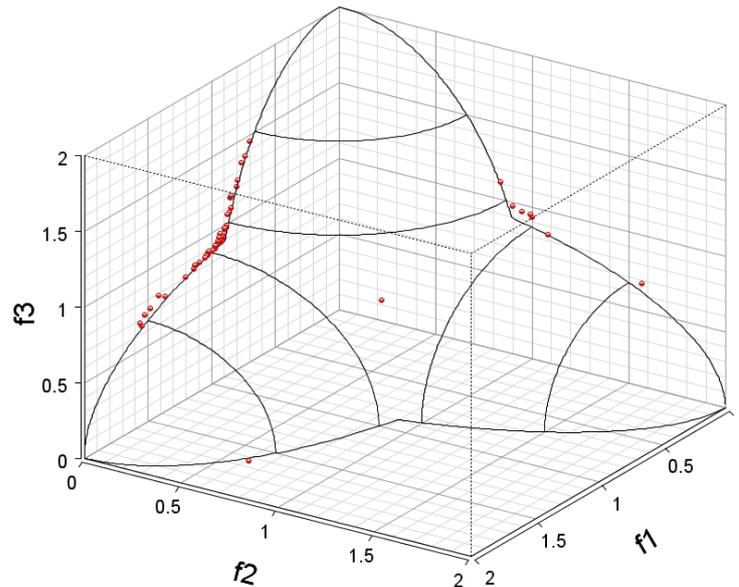


Abbildung 4.58: C3-DTLZ4 Ergebnisse PGA(50)

4.5 Sonstige Aufgaben

Die Aufgaben flat-ZDT6¹⁸ und deceptive-ZDT3¹⁹ wurden jeweils mit 2 Parametern ausgeführt. Für die Testläufe der Probleme flat-DTLZ1²⁰ sowie deceptive-DTLZ1²¹ wurden 3 Ziele und 3 Parameter benutzt

4.5.1 flat-ZDT6

Die Schwierigkeit dieser Aufgabe sind die flachen Bereiche, die durch die g -Funktion zustande kommen und die Verzerrung in der Pareto-Front, die durch die erste Zielfunktion entsteht. Der SPEA2(50) und der SMS-EMOA(50) zeigen bei dieser Aufgabe ein ähnliches Verhalten und die Ergebnisse der Kriterien liegen ziemlich nah beieinander. Beide Verfahren erhalten die besten Bewertungen beim Hypervolumen und bei der Konvergenzmetrik. Sie schneiden bei der Anzahl der Pareto-Punkte jedoch deutlich schlechter ab als der NSGA-II(50) und der NSGA-II(25). Auch bei der Relativen Dominanz liegen beide Verfahren hinter dem NSGA-II(50) und dem PGA(50).

Der NSGA-II(50) erzielt die besten Ergebnisse bei der Anzahl der Pareto-Punkte und bei der Relativen Dominanz, liefert jedoch bei der Konvergenzmetrik und beim Hyper-

¹⁸ siehe Anhang A.14 für die Auswertungs-Tabellen

¹⁹ siehe Anhang A.16 für die Auswertungs-Tabellen

²⁰ siehe Anhang A.15 für die Auswertungs-Tabellen

²¹ siehe Anhang A.17 für die Auswertungs-Tabellen

volumen nur durchschnittliche Ergebnisse. Die betreffenden Tortendiagramme werden in der Abbildung 4.59 dargestellt. Die Testergebnisse sind auf den Abbildungen 4.60 und 4.61 zu finden. Auf den Ergebnisplots sieht man auch, dass der NSGA-II(50) deutlich mehr Punkte als die anderen Verfahren findet, wohingegen die Verteilung der Punkte beim SPEA2(50) und beim SMS-EMOA(50) besser sind.

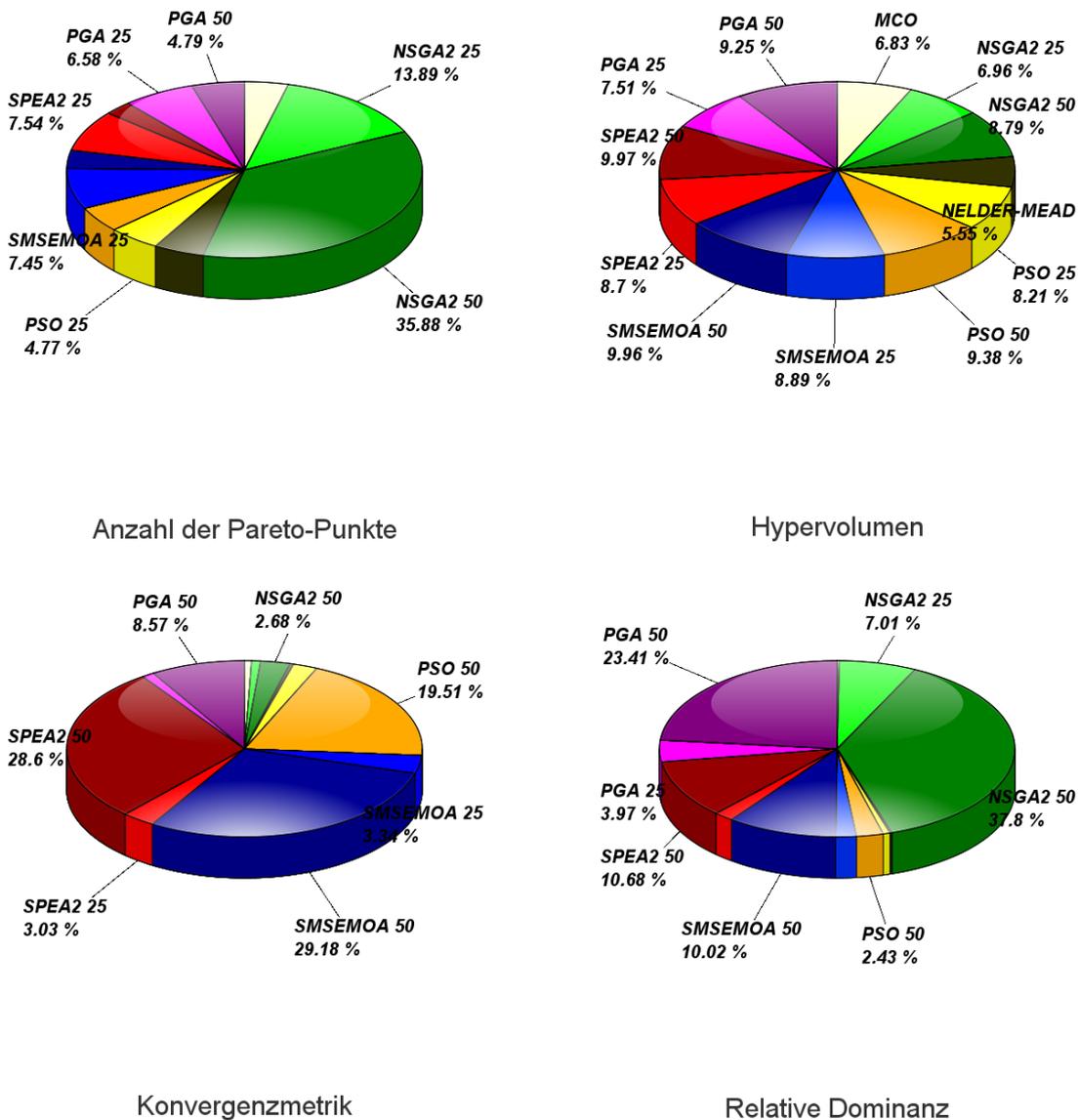


Abbildung 4.59: flat-ZDT6 Tortendiagramme

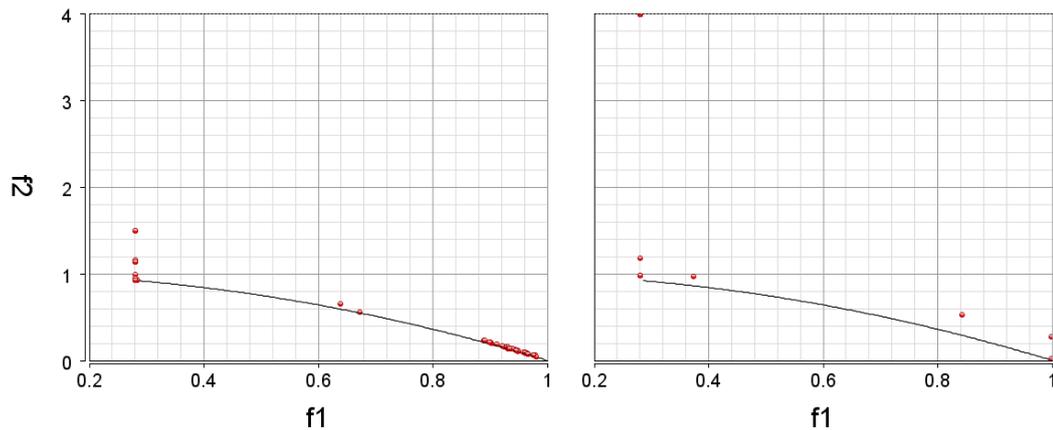


Abbildung 4.60: flat-ZDT6-Ergebnis-Plots: NSGA2(50) und PGA(50)

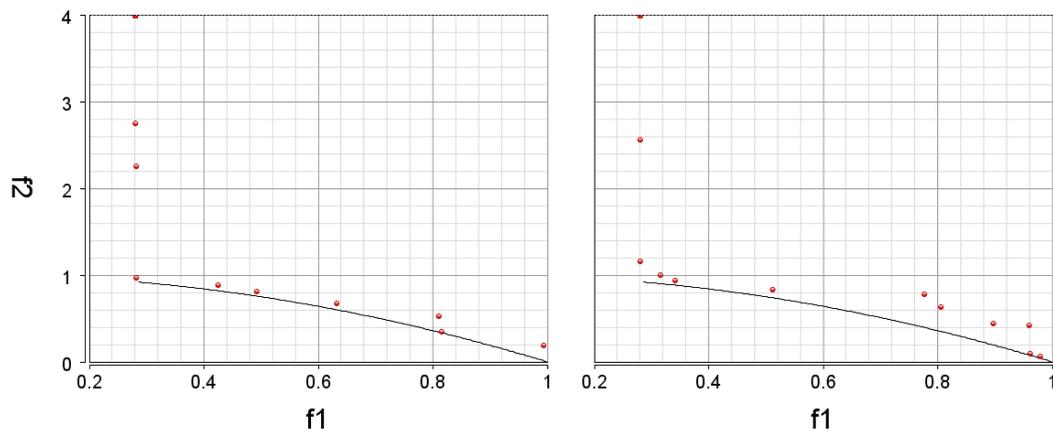


Abbildung 4.61: flat-ZDT6-Ergebnis-Plots: SMS-EMOA(50) und SPEA2(50)

4.5.2 flat-DTLZ1

Wie bei dem vorherigen Problem ist die Herausforderung dieser Aufgabe, die flachen Bereiche der g -Funktion zu überwinden. Der PGA(50) schneidet bei der Konvergenzmetrik und bei der Relativen Dominanz am besten ab und erzielt auch gute Bewertungen bei der Anzahl der Pareto-Punkte und beim Hypervolumen, wie auch an den Testergebnissen auf den Abbildungen 4.63 und 4.64 zu sehen ist. Dabei findet der PGA(50) nicht immer Punkte auf allen Teilen der Pareto-Front, weswegen er beim Hypervolumen schlechter als zum Beispiel der SMS-EMOA(50) oder der SPEA2(50) abschneidet.

Der NSGA-II(50) ermittelt deutlich am meisten Pareto-Punkte, erzielt aber bei den restlichen Kriterien im Vergleich mit den anderen Verfahren nur durchschnittlich bis schlechte Ergebnisse. Der SMS-EMOA(50) und der SPEA2(50) liefern beim Hypervolumen die besten Ergebnisse und erzielen bei der Relativen Dominanz hinter dem PGA(50) die

besten Bewertungen, jedoch schneiden beide Verfahren bei der Konvergenzmetrik eher schlecht ab. Sie ermitteln nur wenige Punkte nahe der Pareto-Front und die meisten Punkte sind weiter von der Pareto-Front entfernt, wie man auf den Testergebnissen auf Abbildung 4.65 sehen kann. Das erklärt auch die schlechten Werte der Konvergenzmetrik, welche die beiden Verfahren aufweisen. Die verhältnismäßigen Ergebnisse sind in der Abbildung 4.62 dargestellt.

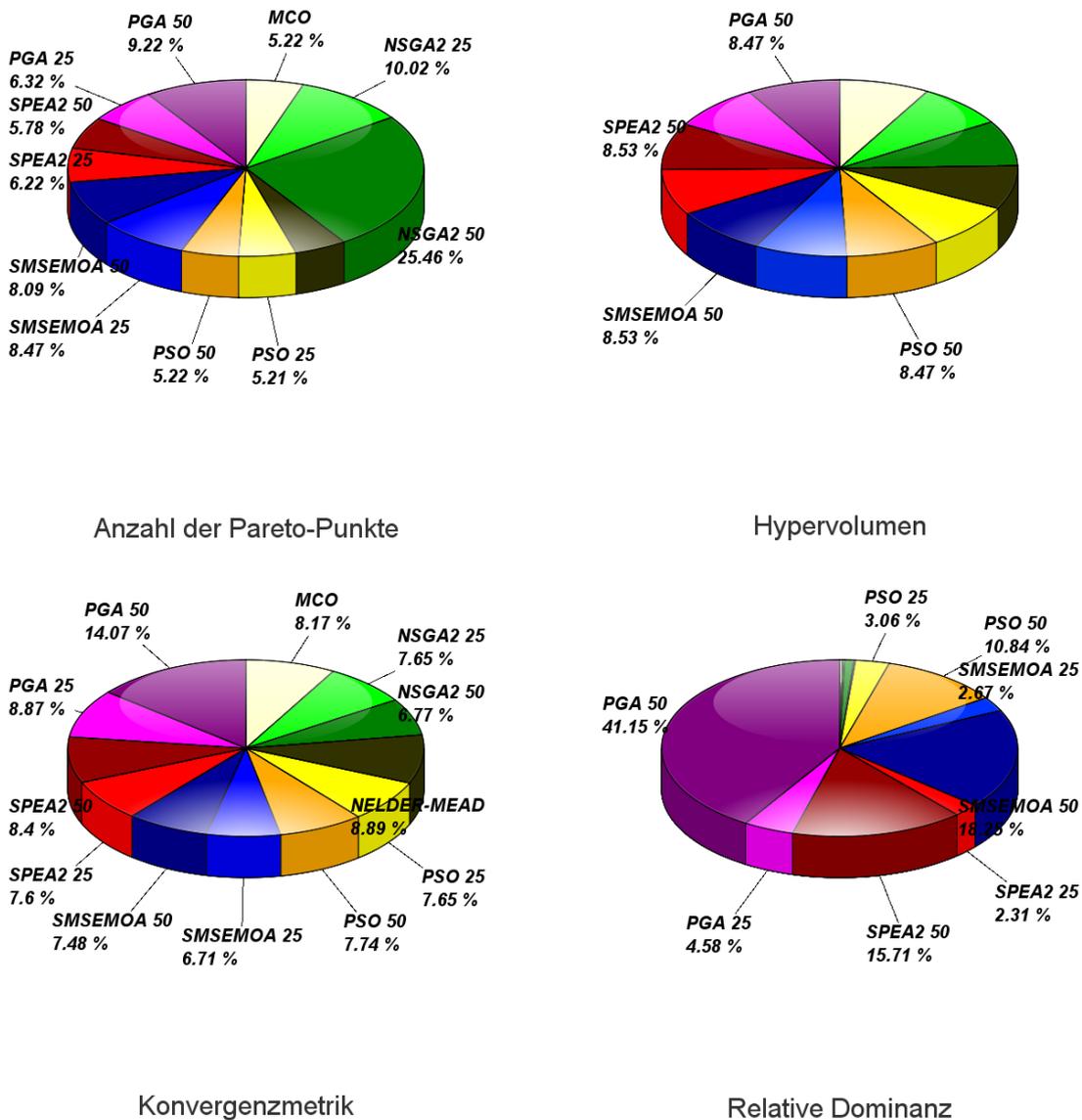


Abbildung 4.62: flat-DTLZ1 Tortendiagramme

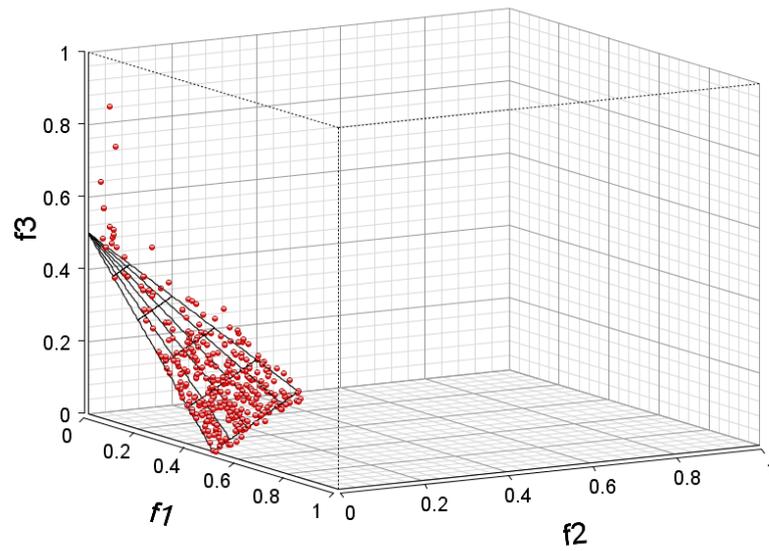


Abbildung 4.63: flat-DTLZ1-Ergebnis-Plots: PGA(50) Beispiel 1

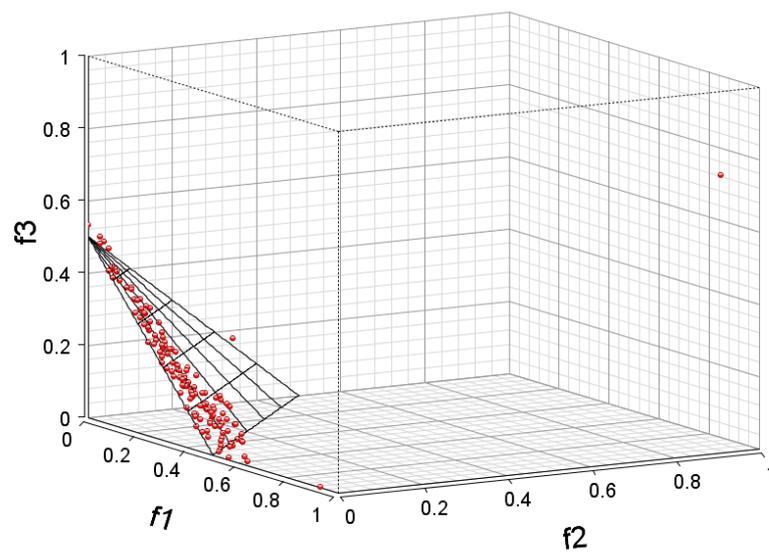


Abbildung 4.64: flat-DTLZ1-Ergebnis-Plots: PGA(50) Beispiel 2

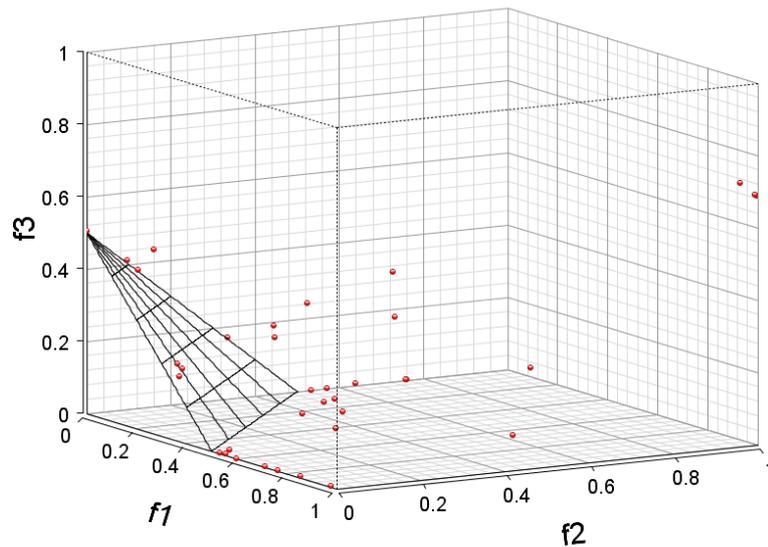


Abbildung 4.65: flat-DTLZ1-Ergebnis-Plots: SMS-EMOA(50)

4.5.3 deceptive-ZDT3

Die täuschende g -Funktion und die nicht zusammenhängende Pareto-Front, welche durch die h -Funktion entsteht, stellen bei dieser Aufgabe die Schwierigkeiten dar. Die besten Ergebnisse liefert bei dieser Aufgabe der NSGA-II(50), der im Durchschnitt deutlich die meisten Pareto-Punkte ermittelt, aber auch bei der Konvergenzmetrik und bei der Relativen Dominanz am besten abschneidet. Nur beim Hypervolumen liefern sowohl der SPEA2(50) als auch der SMS-EMOA(50) im Durchschnitt bessere Werte als der NSGA-II(50), die Standardabweichung und der Maximalwert sind aber beim NSGA-II(50) deutlich höher als beim SPEA2(50) und beim SMS-EMOA(50).

Der PGA(50) und NSGA-II(50) erzielen sowohl bei der Anzahl der Pareto-Punkt und der Konvergenzmetrik ähnliche Bewertungen. Beim Hypervolumen liefert der PGA(50) gute Werte und bei der Relativen Dominanz die drittbesten Ergebnisse. Dabei sind die großen Standardabweichungen bei allen Kriterien beim PGA(50) zu erwähnen. Der SMS-EMOA(50) findet im Mittel die drittmeisten Pareto-Punkte, liefert die zweitbesten Werte beim Hypervolumen und bei der Relativen Dominanz. Auch bei der Konvergenzmetrik erzielt der SMS-EMOA(50) gute Ergebnisse.

Der SPEA2(50) liefert die besten Werte beim Hypervolumen und erzielt auch bei den anderen Kriterien gute Ergebnisse. Die Testergebnisse sind auf den Abbildungen 4.67 und 4.68, während die verhältnismäßigen Ergebnisse in der Abbildung 4.66 zu finden sind.

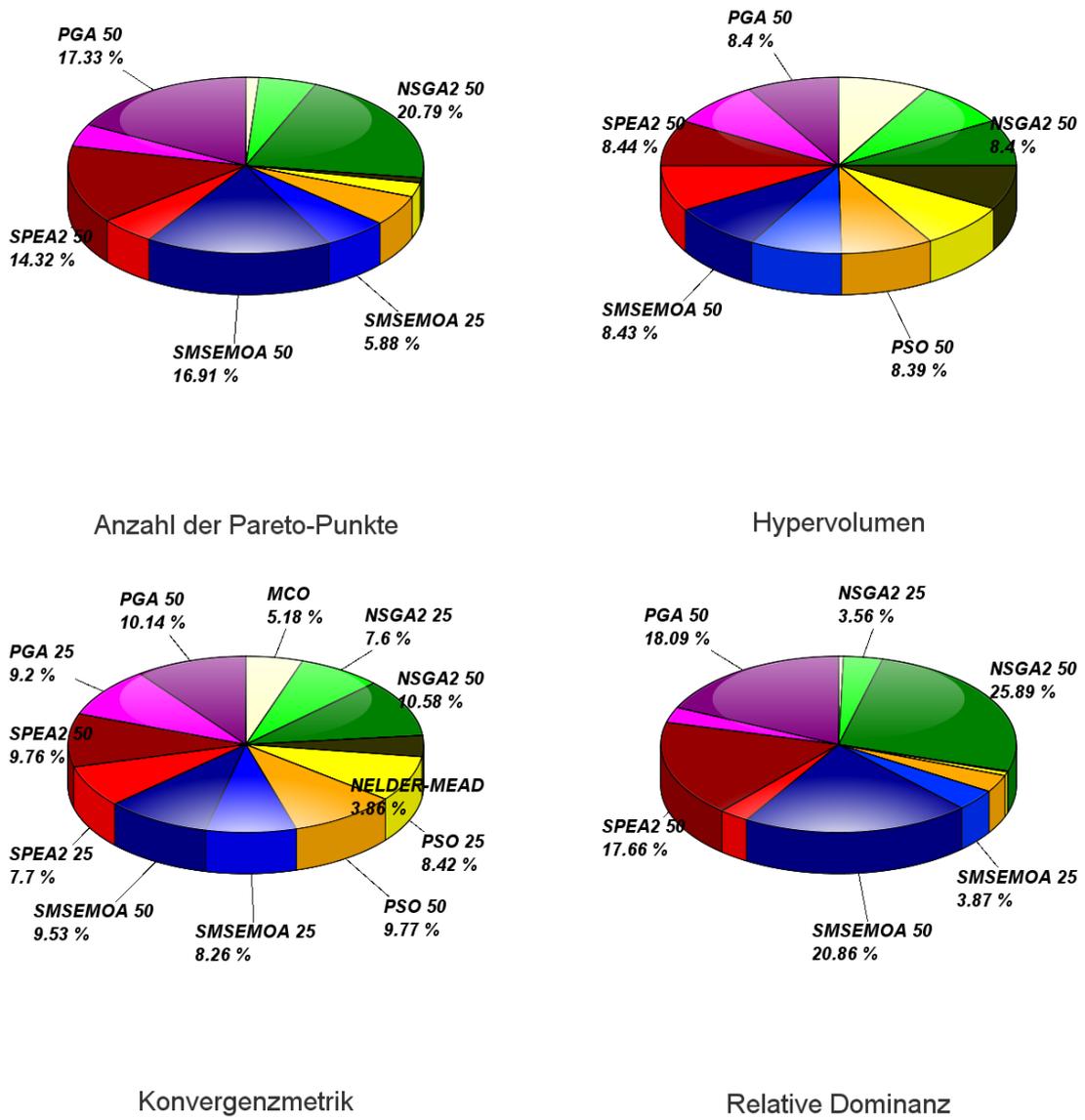


Abbildung 4.66: deceptive-ZDT3 Tortendiagramme

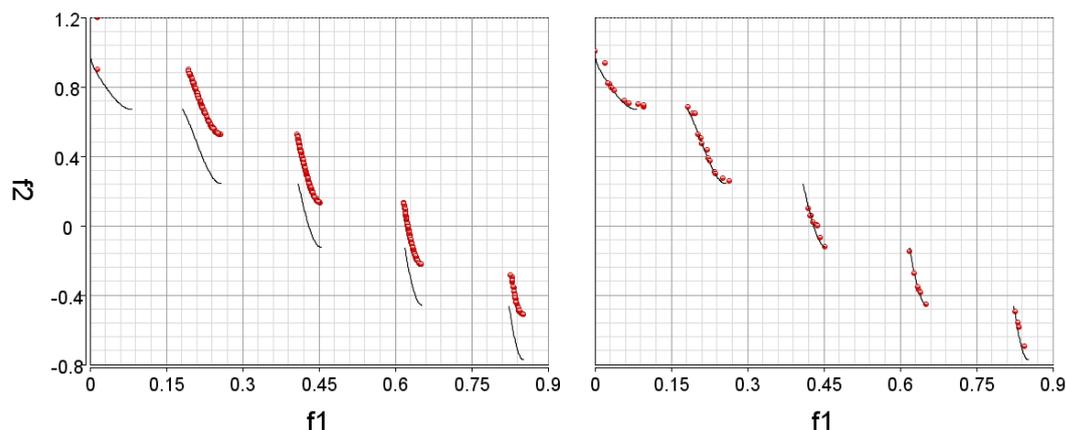


Abbildung 4.67: deceptive-ZDT3-Ergebnis-Plots: NSGA-II(50) und PGA(50)

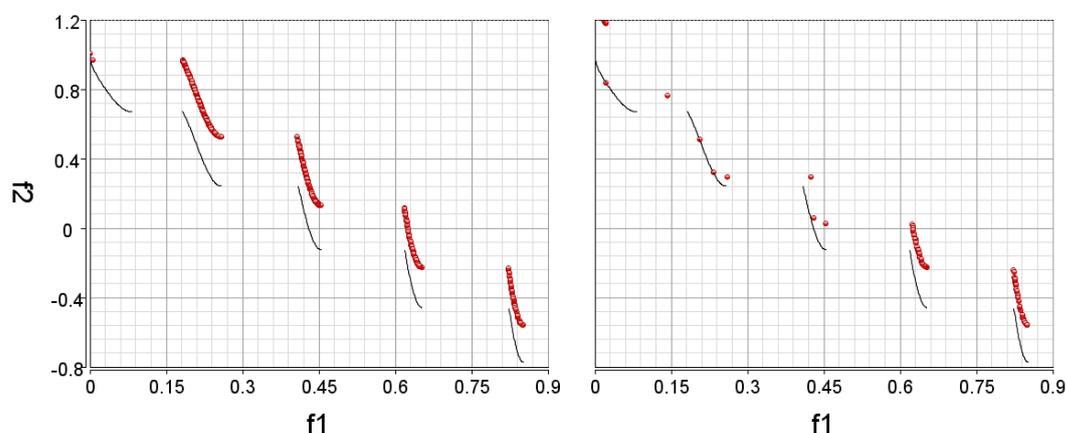


Abbildung 4.68: deceptive-ZDT3-Ergebnis-Plots: SMS-EMOA(50) und SPEA2(50)

4.5.4 deceptive-DTLZ1

Die Schwierigkeit dieser Aufgabe ist die Täuschung, die durch die g -Funktion zustande kommt. Bei dieser Aufgabe hat der SMS-EMOA(50) am besten abgeschnitten. Bei der Anzahl der Pareto-Punkte, beim Hypervolumen und bei der Relativen Dominanz erzielt er die besten Ergebnisse. Bei der Konvergenzmetrik liefert der SMS-EMOA(50) die drittbesten Ergebnisse.

Der PGA(50) erzielt bei der Anzahl der Pareto-Punkte und bei der Relativen Dominanz die zweitbesten Ergebnisse. Beim Hypervolumen liefert der PGA(50) die drittbesten Werte, bei der Konvergenzmetrik schneidet er besser als alle anderen Verfahren ab. Der SPEA2(50) erzielt bei der Anzahl der Pareto-Punkte und bei der Relativen Dominanz die drittbesten und beim Hypervolumen die zweitbeste Bewertung. Die verhältnismäßigen Ergebnisse werden in der Abbildung 4.69 dargestellt. Die Testergebnisse sind auf den Abbildungen 4.70, 4.71 und 4.72 zu finden.

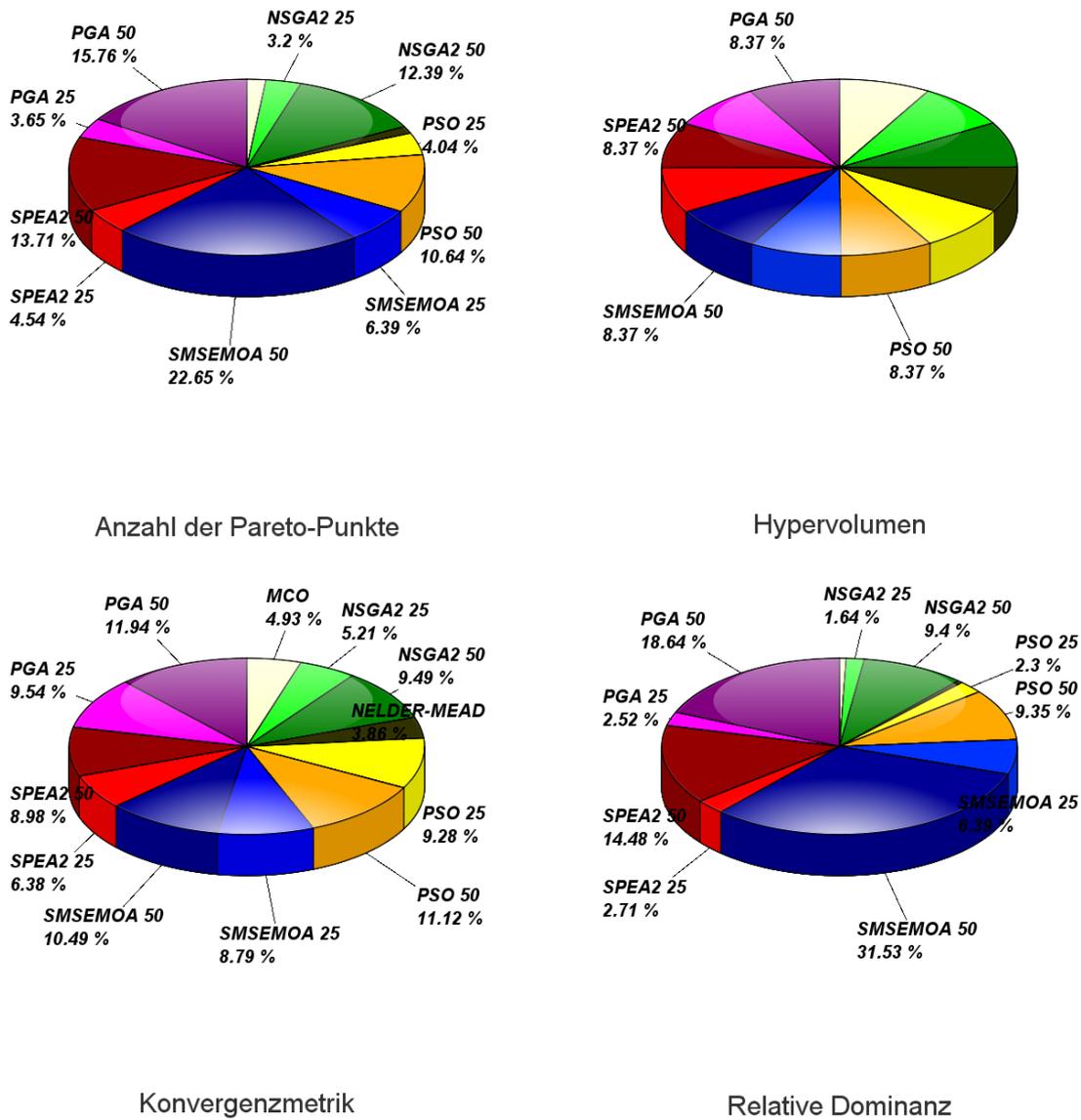


Abbildung 4.69: deceptive-DTLZ1 Tortendiagramme

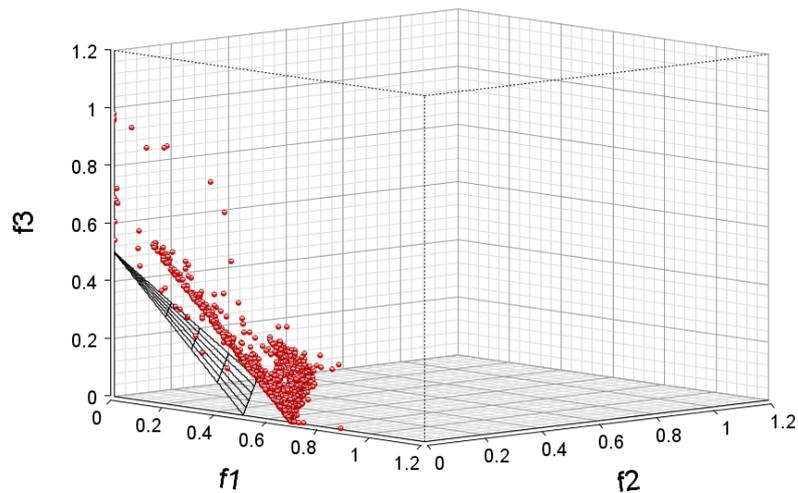


Abbildung 4.70: deceptive-DTLZ1-Ergebnis-Plots: SMS-EMOA(50)

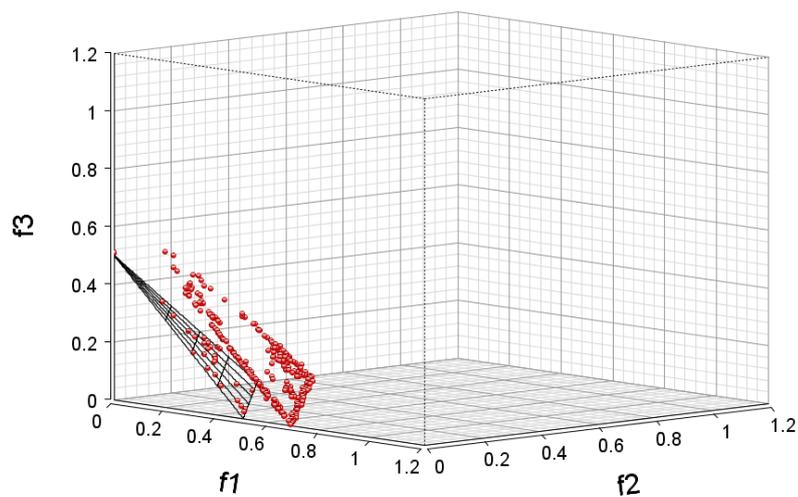


Abbildung 4.71: deceptive-DTLZ1-Ergebnis-Plots: PGA(50)

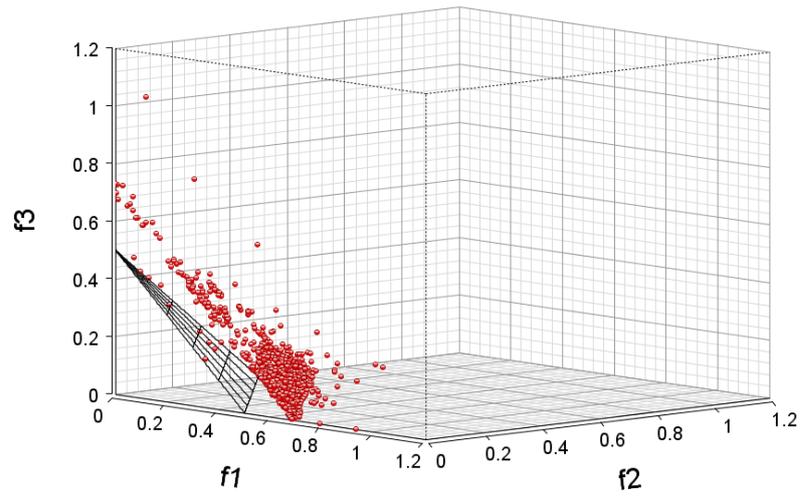


Abbildung 4.72: deceptive-DTLZ1-Ergebnis-Plots: SPEA2(50)

5 Zusammenfassung und Ausblick

Im Rahmen dieser Arbeit wurden Test-Aufgaben für multikriterielle Optimierungsverfahren vorgestellt und untersucht. Der erste Teil dieser Arbeit betrachtet einige Klassen von Optimierungsverfahren. Danach sind Eigenschaften aufgeführt, die bei der multikriteriellen Optimierung Schwierigkeiten bereiten können. In Kapitel 3 wurden die ZDT-Testsuite, die DTLZ-Testsuite und eine Auswahl von modifizierten DTLZ-Problemen mit Nebenbedingungen vorgestellt und analysiert. Anschließend wurden weitere Testprobleme eingeführt, um die restlichen Eigenschaften abzudecken. Eine Auswahl der vorgestellten Testprobleme wurde in Kapitel 4 ausführlich mit mehreren Optimierungsverfahren getestet und ausgewertet.

An den Test-Ergebnissen wird verdeutlicht, dass es kein bestes Verfahren für alle Test-Probleme gibt, sondern jedes Verfahren seine Vor- und Nachteile hat. Dabei lieferte der PGA die besten Ergebnisse bei Aufgaben mit Multimodalität, während die meisten anderen Verfahren bei diesen Problemen höchstens wenige Punkte auf der Pareto-Front finden konnten. Generell bei Aufgaben bei denen die Schwierigkeit bestand, zur Pareto-Front zu konvergieren, konnte der PGA überzeugen. Jedoch hatte der PGA bei Problemen, die das Finden von möglichst verschiedenen Lösungen erschweren, Schwierigkeiten, damit eine gute Ausbreitung der Lösungen zu ermitteln.

Der SMS-EMOA erzielte die besten Ergebnisse bei Aufgaben, deren Schwierigkeiten darin bestanden, möglichst viele verschiedene Lösungen zu finden. Gerade bei Aufgaben mit einer nicht zusammenhängenden Pareto-Front oder bei Aufgaben mit Verzerrung in der Pareto-Front konnte der SMS-EMOA überzeugen. Ebenso liefert der SPEA2 seine besten Ergebnisse bei Aufgaben, bei denen das Ermitteln von möglichst vielen unterschiedlichen Punkten die Hauptschwierigkeit ist. Er schneidet jedoch bei Aufgaben mit 2 Zielen meist besser ab, als bei Aufgaben mit mehr als 2 Zielen. Der PSO erzielte seine besten Ergebnisse bei Problemen mit allgemeiner Verzerrung, auch bei Aufgaben bei denen die Pareto-Front nicht zusammenhängend ist, schneidet er gut ab.

Eine Ergebniszusammenfassung der Kriterien Hypervolumen, Konvergenzmetrik und Relative Dominanz befinden sich in den Tabellen 5.1, 5.2 und 5.3. In diesen Tabellen werden die Platzierung der einzelnen Verfahren für jede in dieser Arbeit getestete Testaufgabe angegeben. Die Hintergrundfarbe gibt dabei an, ob es im Vergleich mit den anderen Verfahren gut (grün), mittelmäßig (gelb) oder schlecht (rot) abgeschnitten hat. In Tabelle 5.4 befindet sich eine Auswertung, wie die Verfahren bei ausgewählten Eigenschaften abgeschnitten haben.

Hypervolumen	PGA	SMS-EMOA	SPEA2	PSO	NSGA-II
ZDT3	4.	2.	1.	3.	5.
ZDT4	2.	4.	3.	5.	1.
ZDT6	5.	2.	3.	1.	4.
DTLZ1(6p,3z)	1.	2.	3.	5.	4.
DTLZ1(10p,3z)	1.	2.	3.	5.	4.
DTLZ1(7p,5z)	1.	2.	3.	5.	4.
DTLZ2	2.	1.	3.	4.	5.
DTLZ3	1.	2.	3.	5.	4.
DTLZ4	3.	1.	2.	4.	5.
DTLZ6	3.	2.	4.	1.	5.
DTLZ7	4.	3.	2.	1.	5.
C1-DTLZ1	1.	5.	4.	2.	3.
C2-DTLZ2	2.	1.	3.	4.	5.
C3-DTLZ1	1.	3.	2.	5.	4.
C3-DTLZ4	4.	1.	2.	5.	3.
flat-ZDT6	4.	2.	1.	3.	5.
flat-DTLZ1	4.	1.	2.	3.	5.
deceptive-ZDT3	4.	2.	1.	5.	3.
deceptive-DTLZ1	3.	1.	2.	4.	5.

Tabelle 5.1: Ergebnisauswertung Hypervolumen

Konvergenzmetrik	PGA	SMS-EMOA	SPEA2	PSO	NSGA-II
ZDT3	5.	2.	1.	3.	4.
ZDT4	2.	4.	3.	1.	5.
ZDT6	4.	2.	3.	1.	5.
DTLZ1(6p,3z)	1.	2.	3.	4.	5.
DTLZ1(10p,3z)	1.	2.	5.	4.	3.
DTLZ1(7p,5z)	1.	2.	5.	4.	3.
DTLZ2	1.	2.	4.	3.	5.
DTLZ3	1.	2.	3.	5.	4.
DTLZ4	1.	2.	3.	5.	4.
DTLZ6	3.	2.	4.	1.	5.
DTLZ7	4.	1.	2.	5.	3.
C1-DTLZ1	1.	4.	3.	2.	5.
C2-DTLZ2	1.	2.	5.	3.	4.
C3-DTLZ1	1.	2.	3.	4.	5.
C3-DTLZ4	3.	2.	1.	4.	5.
flat-ZDT6	4.	1.	2.	3.	5.
flat-DTLZ1	1.	4.	2.	3.	5.
deceptive-ZDT3	2.	5.	4.	3.	1.
deceptive-DTLZ1	1.	3.	5.	2.	4.

Tabelle 5.2: Ergebnisauswertung Konvergenzmetrik

Relative Dominanz	PGA	SMS-EMOA	SPEA2	PSO	NSGA-II
ZDT3	5.	1.	2.	3.	4.
ZDT4	2.	3.	4.	5.	1.
ZDT6	4.	2.	5.	1.	3.
DTLZ1(6p3z)	1.	4.	5.	3.	2.
DTLZ1(10p,3z)	1.	4.	5.	3.	2.
DTLZ1(7p,5z)	1.	2.	4.	5.	3.
DTLZ2	2.	1.	3.	5.	4.
DTLZ3	1.	4.	5.	3.	2.
DTLZ4	3.	1.	2.	5.	4.
DTLZ6	2.	3.	5.	1.	4.
DTLZ7	5.	1.	2.	3.	4.
C1-DTLZ1	1.	5.	3.	2.	4.
C2-DTLZ2	2.	1.	5.	4.	3.
C3-DTLZ1	1.	3.	4.	5.	2.
C3-DTLZ4	5.	2.	1.	4.	3.
flat-ZDT6	2.	4.	3.	5.	1.
flat-DTLZ1	1.	2.	3.	4.	5.
deceptive-ZDT3	3.	2.	4.	5.	1.
deceptive-DTLZ1	2.	1.	3.	5.	4.

Tabelle 5.3: Ergebnisauswertung Relative Dominanz

Eigenschaften	PGA	SMS-EMOA	SPEA2	PSO	NSGA-II
nicht zusammenh. PF	schlecht	gut	gut	gut	schlecht
Multimodalität	gut	schlecht	schlecht	schlecht	schlecht
Verzerrung allgemein	mäßig	mäßig	mäßig	gut	schlecht
Verzerrung PF	mäßig	gut	mäßig	mäßig	schlecht
flache Bereiche	gut	gut	gut	mäßig	mäßig
Täuschung	gut	gut-mäßig	mäßig	mäßig	gut-mäßig

Tabelle 5.4: Ergebnisauswertung nach Eigenschaften

Ausblick

Es gibt noch Eigenschaften, die die Optimierung erschweren, welche in dieser Arbeit nicht erwähnt wurden. Dazu gehören Parameterabhängigkeiten, die auch Parameterverbindungen genannt werden. Bei Parameterabhängigkeiten handelt es sich um eine Eigenschaft, bei der eine Änderung des einen Parameters auch zu einer Änderung der damit verbundenen Parameter führt, was die Optimierung zusätzlich erschwert. Dieses

Verhalten ist auch in [9] und [10] beschrieben. Es existieren auch eine Fülle von Test-Aufgaben, die Parameterabhängigkeiten abdecken (siehe [9] und [10]). Eine weitere Eigenschaft, die in dieser Arbeit noch nicht untersucht wurde, ist, wenn die Nebenbedingungen so gewählt werden, dass sie den Zielbereich in mehrere disjunkte Teile zerlegen. Außerdem könnten noch binär codierte Aufgaben untersucht werden, welche bei Funktionen mit täuschenden lokalen Optima oft zum Einsatz kommen.

Eine Testsuite, die sich lohnen würde zu untersuchen, ist das WFG-Toolkit. Die WFG-Testsuite beinhaltet Testaufgaben, bei denen die Eigenschaften dadurch zustande kommen, dass der Parametervektor mittels Transformations-Funktionen umgewandelt wird. Um bei diesen Aufgaben zuverlässig zur Pareto-Front zu konvergieren, wären wesentlich mehr Iterationen, als in dieser Arbeit verwendet wurden von Vorteil und bei den Genetischen Algorithmen und dem PSO wohl eine größere Population günstig.

Des Weiteren wäre für die Auswertung ein Kriterium, welches nur die Diversität der verschiedenen Lösungen bewertet, von Vorteil gewesen, da das Hypervolumen ein Kriterium für die Ausbreitung und Konvergenz ist.

Literaturverzeichnis

- [1] Alt, Walter: Nichtlineare Optimierung: Eine Einführung in Theorie, Verfahren und Anwendung. 1. Aufl. Braunschweig/Wiesbaden: Friedr. Vieweg & Sohn Verlagsgesellschaft, 2002.
- [2] Beume, Nicola : Hypervolumen-basierte Selektion in einem evolutionären Algorithmus zur Mehrzieloptimierung. - 2006 Dortmund, Universität Dortmund, Fachbereich Informatik, Diplomarbeit, 2006
- [3] Deb, Kalyanmoy; Agarwal, Sameer; Pratap, Amrit: A Fast and Elitist Multi-Objective Genetic Algorithm: NSGA-II. IEEE Transactions on Evolutionary Computation 6(2), 2002.
- [4] Deb, Kalyanmoy; Pratap , Amrit; Meyarivan, T: Constrained Test Problems for Multi-Objective Evolutionary Optimization. -2000 Kanpur India, Indian Institute of Technology Kanpur, Kanpur Genetic Algorithms Laboratory, KanGAL Report No. 200005.
- [5] Deb, Kalyanmoy; Jain Sachin: Running Performance Metrics for Evolutionary Mutli-Objective Optimization. - 2002 Kanpur India, Indian Institute of Technology Kanpur, Kanpur Genetic Algorithms Laboratory, KanGAL Report No. 2002004.
- [6] Deb, Kalyanmoy: Multi-objective Genetic Algorithms: Problem Difficulties and Construction of Test Problems. Evolutionary Computation Journal 7(3), 1999.
- [7] Deb, Kalyanmoy: Multi-Objective Optimization using Evolutionary Algorithms. 1. Aufl. Weinheim, Brisbane, Toronto, Singapore: John Wiley & Sons, Chichester 2001.
- [8] Deb, Kalyanmoy; Thiele, Lothar; Laumanns, Marco; Zitzler, Eckart: Scalable Test Problems for Evolutionary Multi-Objective Optimization. TIK-Technical Report No. 112, Institut für Technische Informatik und Kommunikationsnetze, ETH Zürich, 2001.
- [9] Deb, Kalyanmoy; Sinha, Ankur; Saku, Kukkonen: Multi-Objective Test Problems, Linkages, and Evolutionary Methodologies. - 2006 Kanpur India, Indian Institute of Technology Kanpur, Kanpur Genetic Algorithms Laboratory, KanGAL Report No. 2006001.
- [10] Huband, Simon; Hingston, Philip; Barone, Luigi; While, Lyndon: A Review of Multi-objective Test Problems and a Scalable Test Problem Toolkit. ECU Publications

- Pre. 2011, Edith Cowan University, 2006.
- [11] Jain, Himanshu; Deb, Kalyanmoy: An Evolutionary Many-objective Optimization Algorithm Using Reference-point Based Non-dominated Sorting Approach, Part II: Handling Constraints and Extending to an Adaptive Approach. - 2012 Kanpur India, Indian Institute of Technology Kanpur, Kanpur Genetic Algorithms Laboratory, KanGAL Report No.2012010.
- [12] Kux, Steffen: Hybride Optimierungsstrategien für komplexe technische Aufgabenstellungen. Masterarbeit, Hochschule Mittweida - University of Applied Sciences/IAV GmbH, 2012.
- [13] Putzert, Frank: Moderne Evolutionäre Verfahren/Genetische Algorithmen für den Einsatz in technischen Aufgabenstellungen und Bewertungsstrategien zum Vergleich der Güte und Effektivität von multikriteriellen Optimierungsverfahren. Masterarbeit TU Chemnitz/IAV GmbH, 2012.
- [14] Röber, Marcel: Multikriterielle Optimierungsverfahren für rechenzeitintensive technische Aufgabenstellungen. Diplomarbeit, TU Chemnitz/IAV GmbH, 2010.
- [15] Schuster, Julia: Untersuchung von Optimierungsverfahren der ein- und multikriteriellen Optimierung mit diskreten Parametern für Anwendungen in der Antriebstrangauslegung. Bachelorarbeit, Hochschule Mittweida - University of Applied Sciences/IAV GmbH, 2010.
- [16] Stöcker, Martin: Untersuchung von Optimierungsverfahren für rechenzeitaufwändige technische Anwendungen in der Motorenentwicklung. Diplomarbeit, TU Chemnitz/IAV GmbH, 2007.
- [17] Zitzler, Eckart; Deb, Kalyanmoy; Thiele, Lothar: Comparison of Multiobjective Evolutionary Algorithms: Empirical Results. *Evolutionary Computation Journal* 8(2), 2000.
- [18] Zitzler, Eckart; Laumanns, Marco; Thiele, Lothar: SPEA2: Improving the Strength Pareto Evolutionary Algorithm. TIK-Report No.103, Department of Electrical Engineering, ETH Zürich, 2001.

Anhang A: Tabellen für Testauswertung

A.1 ZDT3

Anzahl der Pareto-Punkte	Mittelwert	Standardabweichung	Minimum	Maximum
MCO	10.86	2.66	6	16
NSGA-II(25)	30.76	13.88	4	67
NSGA-II(50)	197.72	42.79	123	312
Nelder-Mead	13.08	3.59	5	21
PSO(25)	46.26	35.89	7	180
PSO(50)	251.57	172.48	67	1055
SMS-EMOA(25)	131.62	31.97	69	235
SMS-EMOA(50)	667.76	114.75	507	1277
SPEA2(25)	105.37	25.80	52	196
SPEA2(50)	481.15	78.33	345	784
PGA(25)	25.29	9.66	8	52
PGA(50)	65.52	15.40	38	104

Tabelle A.1: ZDT3-Ergebnisse: Anzahl der Pareto-Punkte

Hypervolumen	Mittelwert	Standardabweichung	Minimum	Maximum
MCO	12.428005	0.324835	11.798162	13.002251
NSGA-II(25)	13.721489	0.598213	12.766122	15.041096
NSGA-II(50)	14.48774	0.524261	13.271993	15.408229
Nelder-Mead	11.617102	0.406863	10.770853	12.496761
PSO(25)	14.938515	0.291154	14.091685	15.507624
PSO(50)	15.399362	0.130672	15.111606	15.582852
SMS-EMOA(25)	14.725017	0.539245	13.417834	15.562276
SMS-EMOA(50)	15.432437	0.341876	13.422164	15.58578
SPEA2(25)	14.650803	0.574892	12.954011	15.473625
SPEA2(50)	15.443482	0.271297	13.422015	15.583843
PGA(25)	13.818412	0.566922	12.251530	14.918719
PGA(50)	15.244027	0.192228	14.602438	15.505025

Tabelle A.2: ZDT3-Ergebnisse: Hypervolumen zum Referenzpunkt (2, 7.38515)

Konvergenzmetrik	Mittelwert	Standardabweichung	Minimum	Maximum
MCO	0.073062	0.022277	0.042323	0.131641
NSGA-II(25)	0.000896	0.00138	0	0.007316
NSGA-II(50)	0.000047	0.000089	0	0.000600
Nelder-Mead	0.092489	0.022659	0.030166	0.150199
PSO(25)	0.00019	0.000373	0.000001	0.002238
PSO(50)	0.000004	0.000005	0	0.000023
SMS-EMOA(25)	0.000026	0.000074	0	0.000482
SMS-EMOA(50)	0.000002	0.000012	0	0.000110
SPEA2(25)	0.000023	0.000058	0	0.000454
SPEA2(50)	0.0000004	0.000001	0	0.000004
PGA(25)	0.009172	0.007504	0.000078	0.046677
PGA(50)	0.000188	0.000225	0.00002	0.001510

Tabelle A.3: ZDT3-Ergebnisse: Konvergenzmetrik

Relative Dominanz	Mittelwert	Standardabweichung	Minimum	Maximum
MCO	0	0	0	0
NSGA-II(25)	0	0	0	0
NSGA-II(50)	0.015134	0.020228	0	
Nelder-Mead	0	0	0	0
PSO(25)	0.019378	0.030230	0.000722	0.178096
PSO(50)	0.155433	0.123710	0.002086	0.557316
SMS-EMOA(25)	0.029743	0.032733	0	0.174638
SMS-EMOA(50)	0.537398	0.116090	0.223983	0.809706
SPEA2(25)	0.011101	0.018428	0	0.091691
SPEA2(50)	0.231679	0.088372	0.104478	0.551724
PGA(25)	0	0	0	0
PGA(50)	0.000135	0.000467	0	0.002660

Tabelle A.4: ZDT3-Ergebnisse: Relative Dominanz

A.2 ZDT4

Anzahl der Pareto-Punkte	Mittelwert	Standardabweichung	Minimum	Maximum
MCO	5.77	2.53	2	11
NSGA-II(25)	12.84	3.60	6	22
NSGA-II(50)	19.29	6.69	8	47
Nelder-Mead	7.13	2.68	1	14
PSO(25)	1.66	0.90	1	5
PSO(50)	1.49	0.66	1	3
SMS-EMOA(25)	8.16	2.70	2	16
SMS-EMOA(50)	5.24	2.22	1	13
SPEA2(25)	7.56	2.52	2	16
SPEA2(50)	4.61	2.22	1	13
PGA(25)	5.30	4.49	1	32
PGA(50)	4.39	2.39	1	11

Tabelle A.5: ZDT4-Ergebnisse: Anzahl der Pareto-Punkte

Hypervolumen	Mittelwert	Standardabweichung	Minimum	Maximum
MCO	255.157383	8.304631	234.938648	269.977146
NSGA-II(25)	290.803480	9.732200	272.508538	310.398218
NSGA-II(50)	304.768868	6.504770	278.350572	314.124935
Nelder-Mead	243.644629	10.205604	219.675238	265.167717
PSO(25)	284.118431	9.340956	259.358376	316.229473
PSO(50)	293.391193	7.476635	269.196901	310.828344
SMS-EMOA(25)	286.719381	7.220050	269.439458	308.112156
SMS-EMOA(50)	297.921208	4.772428	285.134664	308.085797
SPEA2(25)	285.836007	9.875199	261.877192	309.346969
SPEA2(50)	298.304897	4.896035	286.181562	309.159954
PGA(25)	293.779066	9.045568	256.713858	309.712824
PGA(50)	303.562461	4.166910	293.903527	313.799925

Tabelle A.6: ZDT4-Ergebnisse: Hypervolumen zum Referenzpunkt (1.998654, 159.221237)

Konvergenzmetrik	Mittelwert	Standardabweichung	Minimum	Maximum
MCO	0.142965	0.047499	0.04616	0.246691
NSGA-II(25)	0.090271	0.049618	0.020077	0.268352
NSGA-II(50)	0.034274	0.029556	0.001272	0.1557
Nelder-Mead	0.182437	0.055045	0.04725	0.321494
PSO(25)	0.021456	0.018006	0	0.098096
PSO(50)	0.010728	0.009799	0.001227	0.049266
SMS-EMOA(25)	0.080837	0.036054	0.011104	0.254885
SMS-EMOA(50)	0.017358	0.016943	0.001353	0.153431
SPEA2(25)	0.084156	0.041527	0.01945	0.237624
SPEA2(50)	0.014988	0.010576	0.000521	0.066482
PGA(25)	0.017739	0.013919	0.000969	0.071108
PGA(50)	0.011108	0.00947	0.000492	0.049536

Tabelle A.7: ZDT4-Ergebnisse: Konvergenzmetrik

Relative Dominanz	Mittelwert	Standardabweichung	Minimum	Maximum
MCO	0	0	0	0
NSGA-II(25)	0.054154	0.148735	0	0.857143
NSGA-II(50)	0.420977	0.343551	0	0.923077
Nelder-Mead	0	0	0	0
PSO(25)	0.014719	0.102489	0	1
PSO(50)	0.065972	0.117623	0	0.5
SMS-EMOA(25)	0.006944	0.039358	0	0.333333
SMS-EMOA(50)	0.079764	0.144229	0	0.6
SPEA2(25)	0.011024	0.047855	0	0.333333
SPEA2(50)	0.070225	0.134816	0	0.666667
PGA(25)	0.047922	0.113703	0	0.5
PGA(50)	0.228298	0.264641	0	1

Tabelle A.8: ZDT4-Ergebnisse: Relative Dominanz

A.3 ZDT6

Anzahl der Pareto-Punkte	Mittelwert	Standardabweichung	Minimum	Maximum
MCO	6.51	2.00	3	10
NSGA-II(25)	12.78	4.82	4	30
NSGA-II(50)	29.76	7.91	17	55
Nelder-Mead	8.40	2.92	2	16
PSO(25)	358.39	92.62	101	507
PSO(50)	2061.63	142.22	1446	2285
SMS-EMOA(25)	22.59	4.88	12	34
SMS-EMOA(50)	201.28	29.30	133	262
SPEA2(25)	20.43	5.10	10	33
SPEA2(50)	143.25	23.57	91	196
PGA(25)	8.39	5.48	2	31
PGA(50)	7.65	3.903831	2	31

Tabelle A.9: ZDT6-Ergebnisse: Anzahl der Pareto-Punkte

Hypervolumen	Mittelwert	Standardabweichung	Minimum	Maximum
MCO	6.604161	0.478235	5.98269	7.579543
NSGA-II(25)	13.708684	1.171022	9.877967	15.958022
NSGA-II(50)	17.102732	0.187689	16.528483	17.455450
Nelder-Mead	5.490292	0.503336	4.567199	6.849787
PSO(25)	17.902203	0.041792	17.555353	17.919039
PSO(50)	17.921459	0.000430	17.918927	17.921797
SMS-EMOA(25)	17.476716	0.116793	17.166550	17.677763
SMS-EMOA(50)	17.907888	0.003768	17.895787	17.915761
SPEA2(25)	17.317264	0.195088	16.575219	17.701175
SPEA2(50)	17.893065	0.007749	17.857967	17.906315
PGA(25)	9.647281	1.455557	6.822386	13.186329
PGA(50)	15.197812	1.294502	11.489842	17.444507

Tabelle A.10: ZDT6-Ergebnisse: Hypervolumen zum Referenzpunkt (2, 10.653553)

Konvergenzmetrik	Mittelwert	Standardabweichung	Minimum	Maximum
MCO	0.349720	0.050050	0.235669	0.432812
NSGA-II(25)	0.038412	0.034756	0.001170	0.232806
NSGA-II(50)	0.002673	0.001495	0.000674	0.011214
Nelder-Mead	0.445988	0.069619	0.148705	0.555501
PSO(25)	0.000203	0.000559	0	0.003871
PSO(50)	0.000005	0.000021	0	0.000121
SMS-EMOA(25)	0.002526	0.004036	0.000290	0.019496
SMS-EMOA(50)	0.000085	0.000307	0	0.001839
SPEA2(25)	0.004455	0.007658	0.000198	0.057353
SPEA2(50)	0.000193	0.000545	0.000001	0.003195
PGA(25)	0.111406	0.080828	0.010084	0.361769
PGA(50)	0.002395	0.005869	0.000026	0.048674

Tabelle A.11: ZDT6-Ergebnisse: Konvergenzmetrik

Relative Dominanz	Mittelwert	Standardabweichung	Minimum	Maximum
MCO	0	0	0	0
NSGA-II(25)	0.000028	0.000147	0	0.001277
NSGA-II(50)	0.001156	0.000966	0	0.005540
NM	0	0	0	0
PSO(25)	0.146642	0.035107	0.042918	0.219031
PSO(50)	0.849445	0.035225	0.776930	0.952790
SMS-EMOA(25)	0.000034	0.000116	0	0.000481
SMS-EMOA(50)	0.001313	0.001541	0	0.008879
SPEA2(25)	0.000012	0.000069	0	0.000414
SPEA2(50)	0.000280	0.000335	0	0.001320
PGA(25)	0.000008	0.000055	0	0.000402
PGA(50)	0.001082	0.001337	0	0.008925

Tabelle A.12: ZDT6-Ergebnisse: Relative Dominanz

A.4 DTLZ1

A.4.1 3 Ziele und 6 Parameter

Anzahl der Pareto-Punkte	Mittelwert	Standardabweichung	Minimum	Maximum
MCO	17.43	6.82	4	31
NSGA-II(25)	37.4	15.43	9	81
NSGA-II(50)	65.21	33.93	24	315
Nelder-Mead	24.45	8.54	6	49
PSO(25)	6.96	4.93	1	24
PSO(50)	5.98	3.85	1	18
SMS-EMOA(25)	23.73	7.46	7	47
SMS-EMOA(50)	39.95	12.88	16	77
SPEA2(25)	42.65	13.09	14	77
SPEA2(50)	43.37	16.64	14	98
PGA(25)	30.01	13.50	5	95
PGA(50)	441.49	51.59	289	555

Tabelle A.13: DTLZ1 Ergebnisse: Anzahl der Pareto-Punkte

Hypervolumen	Mittelwert	Standardabweichung	Minimum	Maximum
MCO	77477270	166164.63	76943974.76	77706790.58
NSGA-II(25)	77790164	102076.38	15 77229269.21	77876667.16
NSGA-II(50)	77875668.	4858.28	42 77843386.41	77877387.80
Nelder-Mead	76838968	353892.63	75811548.01	77721444.31
PSO(25)	77802319	131326.18	76874337.10	77876648.67
PSO(50)	77869276	17558.83	77786971.80	77877413.10
SMS-EMOA(25)	77876795	811.55	77870474.90	77877401.29
SMS-EMOA(50)	77877342	93.17	77877079.24	77877423.43
SPEA2(25)	77870910	12485.37	77806578.32	77877383.66
SPEA2(50)	77877305	185.41	77876610.71	77877423.30
PGA(25)	77875215	16247.94	77715131.82	77877423.72
PGA(50)	77877424	0.02	77877423.63	77877423.78

Tabelle A.14: DTLZ1 Ergebnisse: HV zum Referenzpunkte (450.059556, 383.251474, 451.5)

Konvergenzmetrik	Mittelwert	Standardabweichung	Minimum	Maximum
MCO	0.086117	0.025414	0.035804	0.142417
NSGA-II(25)	0.083593	0.087024	0.000095	0.569469
NSGA-II(50)	0.047532	0.069886	0.000001	0.391174
Nelder-Mead	0.118334	0.039283	0.004067	0.223651
PSO(25)	0.027089	0.044429	0	0.334819
PSO(50)	0.029486	0.051676	0	0.286999
SMS-EMOA(25)	0.010187	0.013460	0.000047	0.058339
SMS-EMOA(50)	0.003781	0.007243	0.000032	0.043514
SPEA2(25)	0.089619	0.060820	0.002892	0.281082
SPEA2(50)	0.014435	0.025556	0.000110	0.116783
PGA(25)	0.001152	0.003021	0	0.016513
PGA(50)	0	0	0	0

Tabelle A.15: DTLZ1 Ergebnisse: Konvergenzmetrik

Relative Dominanz	Mittelwert	Standardabweichung	Minimum	Maximum
MCO	0	0	0	0
NSGA-II(25)	0	0	0	0
NSGA-II(50)	0.009894	0.030589	0	0.232075
Nelder-Mead	0	0	0	0
PSO(25)	0.000148	0.000592	0	0.002717
PSO(50)	0.001721	0.002242	0	0.015556
SMS-EMOA(25)	0.000046	0.00032	0	0.002347
SMS-EMOA(50)	0.000442	0.001347	0	0.01
SPEA2(25)	0	0	0	0
SPEA2(50)	0.000205	0.000663	0	0.003058
PGA(25)	0.001432	0.006168	0	0.057906
PGA(50)	0.986113	0.031541	0.758491	1

Tabelle A.16: DTLZ1 Ergebnisse: Relative Dominanz

A.4.2 3 Ziele und 10 Parameter

Anzahl der Pareto-Punkte	Mittelwert	Standardabweichung	Minimum	Maximum
MCO	35.94	7.12	21	49
NSGA-II(25)	56.42	15.56	10	97
NSGA-II(50)	71.61	19.52	35	153
Nelder-Mead	46.71	11.22	20	74
PSO(25)	18.15	8.98	1	43
PSO(50)	16.71	9.72	1	44
SMS-EMOA(25)	32.73	8.11	17	52
SMS-EMOA(50)	63.79	13.46	30	93
SPEA2(25)	65.01	14.86	33	103
SPEA2(50)	98.53	22.14	35	149
PGA(25)	34.74	15.70	4	94
PGA(50)	186.68	40.03	76	308

Tabelle A.17: DTLZ1 M=3 N=10 Ergebnisse: Anzahl der Pareto-Punkte

Hypervolumen	Mittelwert	Standardabweichung	Minimum	Maximum
MCO	526317551	1202358.71	524291665	529000984
NSGA-II(25)	531121118	1497002.74	526264035	533160522
NSGA-II(50)	533228370	61101.37	532942626	533276181
Nelder-Mead	519359944	2528491.99	511507838	525668691
PSO(25)	531722865	1542925.52	524273568	533208975
PSO(50)	533124025	165540.61	532580248	533277191
SMS-EMOA(25)	533232115	35902.36	533090233	533276633
SMS-EMOA(50)	533277272	3919.33	533253511	533278687
SPEA2(25)	532941742	296007.89	531820502	533254610
SPEA2(50)	533274243	7374.19	533224760	533278473
PGA(25)	532687363	1361898.29	525131601	533277632
PGA(50)	533278711	0.15	533278709	533278711

Tabelle A.18: DTLZ1 M=3 N=10 Ergebnisse: HV zum Referenzpunkt (889.258, 665.213, 901.5)

Konvergenzmetrik	Mittelwert	Standardabweichung	Minimum	Maximum
MCO	0.124295	0.017330	0.087010	0.153192
NSGA-II(25)	0.114481	0.053517	0.008457	0.265518
NSGA-II(50)	0.051984	0.039493	0.002145	0.193865
Nelder-Mead	0.13619	0.026142	0.058833	0.193557
PSO(25)	0.043959	0.030430	0.000073	0.143098
PSO(50)	0.023028	0.019904	0	0.117376
SMS-EMOA(25)	0.012116	0.010140	0.000907	0.052821
SMS-EMOA(50)	0.004773	0.004141	0.000844	0.025326
SPEA2(25)	0.096724	0.044058	0.021457	0.288191
SPEA2(50)	0.056056	0.032043	0.005634	0.214869
PGA(25)	0.010705	0.010313	0.000011	0.053174
PGA(50)	0.00000003	$2.227 \cdot 10^{-7}$	0	0.000002

Tabelle A.19: DTLZ1M=3 N=10 Ergebnisse: Konvergenzmetrik

Relative Dominanz	Mittelwert	Standardabweichung	Minimum	Maximum
MCO	0	0	0	0
NSGA-II(25)	0	0	0	0
NSGA-II(50)	0.001475	0.014754	0	0.147541
Nelder-Mead	0	0	0	0
PSO(25)	0	0	0	0
PSO(50)	0.000363	0.001985	0	0.016393
SMS-EMOA(25)	0.000123	0.001235	0	0.012346
SMS-EMOA(50)	0	0	0	0
SPEA2(25)	0	0	0	0
SPEA2(50)	0	0	0	0
PGA(25)	0	0	0	0
PGA(50)	0.998038	0.016446	0.836066	1

Tabelle A.20: DTLZ1 M=3 N=10 Ergebnisse: Relative Dominanz

A.4.3 5 Ziele und 7 Parameter

Anzahl der Pareto-Punkte	Mittelwert	Standardabweichung	Minimum	Maximum
MCO	32.26	11.50	11	76
NSGA-II(25)	71.40	35.12	18	165
NSGA-II(50)	150.87	59.56	52	319
Nelder-Mead	42.43	19.96	5	84
PSO(25)	10.79	9.89	1	51
PSO(50)	15.46	15.31	1	76
SMS-EMOA(25)	40.30	14.42	13	83
SMS-EMOA(50)	99.48	25.41	38	168
SPEA2(25)	169.01	62.76	17	289
SPEA2(50)	387.78	152.41	58	78
PGA(25)	52.73	25.25	2	118
PGA(50)	606.76	74.94	415	731

Tabelle A.21: DTLZ1 M=5 N=7 Ergebnisse: Anzahl der Pareto-Punkte

Hypervolumen	Mittelwert	Standardabweichung	Minimum	Maximum
MCO	4050553323068	5275289967	4035548070391	4058299955821
NSGA-II(25)	4056479462221	4246071137	4041944853904	4061114696911
NSGA-II(50)	4060912357326	722423007	4056196220468	4061230234757
Nelder-Mead	4035438043725	13162537403	3992452999400	4055222620326
PSO(25)	4059401535108	2848669856	4046410347740	4061223347845
PSO(50)	4060907592806	972542162	4055239014723	4061230870182
SMS-EMOA(25)	4061147330023	421863436	4057897634872	4061230526569
SMS-EMOA(50)	4061230470122	1267536	4061221971701	4061230900771
SPEA2(25)	4059535962730	2234646257	4049978865914	4061218409365
SPEA2(50)	4061154400374	157183799	4060202608327	4061230874754
PGA(25)	4060595252408	1755475168	4049556899413	4061230889836
PGA(50)	4061230811794	520842	4061227440513	4061230902324

Tabelle A.22: DTLZ1 M=5 N=7 Ergebnisse: HV zum Referenzpunkt (339, 334, 322, 329, 339)

Konvergenzmetrik	Mittelwert	Standardabweichung	Minimum	Maximum
MCO	0.094247	0.029897	0.024620	0.173973
NSGA-II(25)	0.111701	0.090510	0.000115	0.534098
NSGA-II(50)	0.098107	0.106449	0.000021	0.444531
Nelder-Mead	0.119945	0.043366	0.014047	0.240591
PSO(25)	0.040736	0.073952	0	0.498522
PSO(50)	0.022627	0.030216	0	0.147056
SMS-EMOA(25)	0.012401	0.019538	0.000053	0.086255
SMS-EMOA(50)	0.003797	0.009026	0.000080	0.060105
SPEA2(25)	0.241704	0.080895	0.000142	0.414549
SPEA2(50)	0.247466	0.071016	0.002443	0.434095
PGA(25)	0.007528	0.015380	0	0.075587
PGA(50)	0.00001	0.000036	0	0.000238

Tabelle A.23: DTLZ1 M=5 N=7 Ergebnisse: Konvergenzmetrik

Relative Dominanz	Mittelwert	Standardabweichung	Minimum	Maximum
MCO	0	0	0	0
NSGA-II(25)	0.000964	0.003756	0	0.026316
NSGA-II(50)	0.044543	0.065763	0	0.277277
Nelder-Mead	0.000021	0.000215	0	0.002146
PSO(25)	0.000982	0.001192	0	0.004769
PSO(50)	0.005270	0.006505	0	0.041575
SMS-EMOA(25)	0.007049	0.007454	0	0.035433
SMS-EMOA(50)	0.071416	0.026291	0.001095	0.135908
SPEA2(25)	0.000146	0.000643	0	0.005587
SPEA2(50)	0.033270	0.059999	0	0.271468
PGA(25)	0.012440	0.019285	0	0.094972
PGA(50)	0.823897	0.095401	0.511202	0.980655

Tabelle A.24: DTLZ1 M=5 N=7 Ergebnisse: Relative Dominanz

A.5 DTLZ2

Anzahl der Pareto-Punkte	Mittelwert	Standardabweichung	Minimum	Maximum
MCO	77.04	8.47	62	100
NSGA-II(25)	158.20	17.10	115	203
NSGA-II(50)	589.95	51.66	449	700
Nelder-Mead	66.55	8.44	40	84
PSO(25)	175.34	15.55	131	211
PSO(50)	428.95	22.66	377	472
SMS-EMOA(25)	277.50	20.08	225	334
SMS-EMOA(50)	1052.13	27.84	999	1119
SPEA2(25)	249.43	27.44	178	313
SPEA2(50)	788.24	49.34	680	922
PGA(25)	179.14	27.08	118	237
PGA(50)	829.63	59.34	651	959

Tabelle A.25: DTLZ2 Ergebnisse: Anzahl der Pareto-Punkte

Hypervolumen	Mittelwert	Standardabweichung	Minimum	Maximum
MCO	18.465763	0.072140	18.299476	18.593565
NSGA-II(25)	18.310196	0.195963	17.876755	18.705903
NSGA-II(50)	18.658865	0.092525	18.356041	18.810435
Nelder-Mead	17.83467	0.164384	17.374763	18.214319
PSO(25)	18.722155	0.098980	18.383316	18.844864
PSO(50)	18.871016	0.016497	18.787273	18.887775
SMS-EMOA(25)	18.873405	0.007657	18.850172	18.887827
SMS-EMOA(50)	18.918658	0.000824	18.915853	18.920222
SPEA2(25)	18.683518	0.104202	18.274182	18.840680
SPEA2(50)	18.878888	0.014528	18.826096	18.898722
PGA(25)	18.527957	0.272936	17.623127	18.879942
PGA(50)	18.90679	0.017140	18.833862	18.924285

Tabelle A.26: DTLZ2 Ergebnisse: Hypervolumen zum Referenzpunkt (2.75, 2.575366, 2.75)

Konvergenzmetrik	Mittelwert	Standardabweichung	Minimum	Maximum
MCO	0.009142	0.001531	0.006183	0.012027
NSGA-II(25)	0.005473	0.003202	0.000595	0.013777
NSGA-II(50)	0.001283	0.000807	0.000148	0.005021
Nelder-Mead	0.013010	0.003124	0.007486	0.023502
PSO(25)	0.002396	0.000996	0.000855	0.005891
PSO(50)	0.000536	0.000189	0.000271	0.001423
SMS-EMOA(25)	0.000452	0.000247	0.000117	0.001506
SMS-EMOA(50)	0.000077	0.000035	0.000043	0.000222
SPEA2(25)	0.003039	0.001603	0.000875	0.007658
SPEA2(50)	0.000699	0.000287	0.000244	0.001655
PGA(25)	0.001322	0.000886	0.000130	0.004372
PGA(50)	0.000059	0.000045	0.000010	0.000347

Tabelle A.27: DTLZ2 Ergebnisse: Konvergenzmetrik

Relative Dominanz	Mittelwert	Standardabweichung	Minimum	Maximum
MCO	0.00081	0.000568	0	0.002381
NSGA-II(25)	0.009466	0.006845	0	0.027005
NSGA-II(50)	0.104656	0.030723	0.032049	0.20023
Nelder-Mead	0.000605	0.000653	0	0.00238
PSO(25)	0.011353	0.003876	0.00302	0.022874
PSO(50)	0.055028	0.009181	0.035644	0.082645
SMS-EMOA(25)	0.043182	0.008238	0.028736	0.064396
SMS-EMOA(50)	0.333377	0.029948	0.269702	0.414645
SPEA2(25)	0.017278	0.008742	0.001614	0.039147
SPEA2(50)	0.131508	0.022707	0.077998	0.216083
PGA(25)	0.023632	0.018489	0.00042	0.070891
PGA(50)	0.269104	0.052512	0.061014	0.366233

Tabelle A.28: DTLZ2 Ergebnisse: Relative Dominanz

A.6 DTLZ3

Anzahl der Pareto-Punkte	Mittelwert	Standardabweichung	Minimum	Maximum
MCO	12.63	5.13	3	26
NSGA-II(25)	23.71	9.09	5	52
NSGA-II(50)	84.37	51.78	28	250
Nelder-Mead	11.95	5.55	2	27
PSO(25)	5.87	3.25	1	21
PSO(50)	4.82	2.20	1	14
SMS-EMOA(25)	20.15	6.11	5	38
SMS-EMOA(50)	33.40	10.94	10	68
SPEA2(25)	26.49	9.62	8	55
SPEA2(50)	32.88	11.07	14	71
PGA(25)	25.93	13.35	5	76
PGA(50)	455.30	66.17	245	574

Tabelle A.29: DTLZ3 Ergebnisse: Anzahl der Pareto-Punkte

Hypervolumen	Mittelwert	Standardabweichung	Minimum	Maximum
MCO	286863285	952234.59	283662097	288375926
NSGA-II(25)	288251211	585548.58	284340233	288578477
NSGA-II(50)	288564557	63587.54	288176470	288582299
Nelder-Mead	283459231	2990625.89	275429949	288289760
PSO(25)	288427139	220319.03	287054945	288581338
PSO(50)	288524792	96812.27	288155262	288582384
SMS-EMOA(25)	288575465	51433.46	288066900	288582422
SMS-EMOA(50)	288582088	383.94	288581398	288582451
SPEA2(25)	288562499	83065.46	287960747	288582385
SPEA2(50)	288582075	431.29	288581221	288582451
PGA(25)	288562522	96058.63	288047202	288582452
PGA(50)	288582448	25.99	288582263	288582452

Tabelle A.30: DTLZ3 Ergebnisse: HV zum Referenzpunkt (677, 631.422454, 675.089307)

Konvergenzmetrik	Mittelwert	Standardabweichung	Minimum	Maximum
MCO	0.106763	0.048171	0.001886	0.256299
NSGA-II(25)	0.083648	0.107046	0.000001	0.54323
NSGA-II(50)	0.040319	0.069346	0	0.45014
Nelder-Mead	0.140101	0.08196	0.002828	0.430596
PSO(25)	0.121338	0.115872	0	0.498522
PSO(50)	0.105812	0.121324	0	0.498522
SMS-EMOA(25)	0.016008	0.028754	0.00003	0.190253
SMS-EMOA(50)	0.002119	0.005264	0.000028	0.03802
SPEA2(25)	0.069636	0.077811	0.000042	0.327847
SPEA2(50)	0.00552	0.008667	0.000066	0.053256
PGA(25)	0.001388	0.00421	0	0.028693
PGA(50)	0.00000027	0.000003	0	0.000027

Tabelle A.31: DTLZ3 Ergebnisse: Konvergenzmetrik

Relative Dominanz	Mittelwert	Standardabweichung	Minimum	Maximum
MCO	0	0	0	0
NSGA-II(25)	0.000127	0.000944	0	0.009124
NSGA-II(50)	0.044123	0.068932	0	0.304042
Nelder-Mead	0	0	0	0
PSO(25)	0.000957	0.001385	0	0.004975
PSO(50)	0.002637	0.001516	0	0.013825
SMS-EMOA(25)	0.000067	0.000491	0	0.004357
SMS-EMOA(50)	0.000915	0.00267	0	0.022388
SPEA2(25)	0.000077	0.000383	0	0.002217
SPEA2(50)	0.000886	0.002058	0	0.014052
PGA(25)	0.006445	0.01687	0	0.141148
PGA(50)	0.943766	0.071422	0.676626	0.998249

Tabelle A.32: DTLZ3 Ergebnisse: Relative Dominanz

A.7 DTLZ4

Anzahl der Pareto-Punkte	Mittelwert	Standardabweichung	Minimum	Maximum
MCO	26.17	6.19	10	42
NSGA-II(25)	66.33	35.93	19	181
NSGA-II(50)	116.16	145.53	18	628
Nelder-Mead	22.15	6.47	8	38
PSO(25)	5.18	4.20	1	26
PSO(50)	4.22	2.02	1	9
SMS-EMOA(25)	169.35	84.61	1	293
SMS-EMOA(50)	828.50	224.63	1	1041
SPEA2(25)	135.70	72.882152	1	251
SPEA2(50)	511.88	197.896069	1	753
PGA(25)	23.33	14.798345	1	91
PGA(50)	93.51	108.23576	1	563

Tabelle A.33: DTLZ4 Ergebnisse: Anzahl der Pareto-Punkte

Hypervolumen	Mittelwert	Standardabweichung	Minimum	Maximum
MCO	16.609885	1.219260	13.607055	18.611959
NSGA-II(25)	15.441296	2.523527	12.574530	19.327722
NSGA-II(50)	16.149899	2.361600	12.677012	19.472591
Nelder-Mead	14.975839	1.373797	12.596275	18.060871
PSO(25)	16.069049	2.373589	12.684386	19.075808
PSO(50)	17.266500	1.862427	12.698745	19.101531
SMS-EMOA(25)	17.779896	2.484063	12.695980	19.479297
SMS-EMOA(50)	19.031132	1.404786	12.698372	19.512916
SPEA2(25)	17.695522	2.377169	12.693845	19.466374
SPEA2(50)	18.731678	1.769978	12.698316	19.502351
PGA(25)	16.858612	2.185968	12.633748	19.299087
PGA(50)	17.882547	2.012875	12.683307	19.465035

Tabelle A.34: DTLZ4 Ergebnisse: HV zum Referenzpunkt (2.722769, 2.689696, 2.740519)

Konvergenzmetrik	Mittelwert	Standardabweichung	Minimum	Maximum
MCO	0.013839	0.003852	0.003795	0.024998
NSGA-II(25)	0.010793	0.008771	0.000742	0.049110
NSGA-II(50)	0.011203	0.009848	0.000023	0.048835
Nelder-Mead	0.016032	0.006808	0.004181	0.037347
PSO(25)	0.006033	0.008533	0	0.046370
PSO(50)	0.007951	0.009133	0	0.049271
SMS-EMOA(25)	0.001448	0.001574	0	0.008289
SMS-EMOA(50)	0.000342	0.000237	0	0.001085
SPEA2(25)	0.004035	0.005690	0	0.043865
SPEA2(50)	0.001390	0.001206	0	0.006473
PGA(25)	0.001927	0.003924	0	0.025138
PGA(50)	0.000181	0.000581	0	0.004416

Tabelle A.35: DTLZ4 Ergebnisse: Konvergenzmetrik

Relative Dominanz	Mittelwert	Standardabweichung	Minimum	Maximum
MCO	0.000253	0.000461	0	0.002370
NSGA-II(25)	0.005114	0.016261	0	0.111693
NSGA-II(50)	0.023799	0.067791	0	0.337557
Nelder-Mead	0.000114	0.000728	0	0.006916
PSO(25)	0.000392	0.000638	0	0.002976
PSO(50)	0.001647	0.001126	0.000573	0.007229
SMS-EMOA(25)	0.062177	0.042143	0	0.152403
SMS-EMOA(50)	0.578108	0.162641	0	0.926755
SPEA2(25)	0.033080	0.03252	0	0.237347
SPEA2(50)	0.228017	0.117612	0	0.840941
PGA(25)	0.004127	0.008682	0	0.053310
PGA(50)	0.063173	0.075554	0	0.334598

Tabelle A.36: DTLZ4 Ergebnisse: Relative Dominanz

A.8 DTLZ6

Anzahl der Pareto-Punkte	Mittelwert	Standardabweichung	Minimum	Maximum
MCO	119.53	11.24	94	149
NSGA-II(25)	151.97	26.86	77	205
NSGA-II(50)	330.25	73.76	158	521
Nelder-Mead	106.87	8.82	84	128
PSO(25)	71.44	113.33	5	498
PSO(50)	1245.87	631.59	10	2150
SMS-EMOA(25)	75.97	13.27	42	108
SMS-EMOA(50)	100.76	12.46	78	136
SPEA2(25)	154.08	38.04	88	269
SPEA2(50)	190.47	25.96	117	252
PGA(25)	76.55	51.79	8	242
PGA(50)	42.42	52.48	4	299

Tabelle A.37: DTLZ6 Ergebnisse: Anzahl der Pareto-Punkte

Hypervolumen	Mittelwert	Standardabweichung	Minimum	Maximum
MCO	131.162053	1.233830	127.631061	134.782997
NSGA-II(25)	127.100144	3.450177	116.141782	134.495244
NSGA-II(50)	138.984951	3.389779	132.520411	146.911655
Nelder-Mead	120.943931	1.489443	117.123587	123.864108
PSO(25)	180.607993	6.666848	168.649966	189.770617
PSO(50)	188.990738	2.311193	176.177891	189.781040
SMS-EMOA(25)	166.957129	3.545301	158.485930	174.530128
SMS-EMOA(50)	184.812192	1.116585	181.233229	187.279299
SPEA2(25)	144.539708	5.978530	132.863691	159.307452
SPEA2(50)	173.35194	1.872115	167.336630	176.935963
PGA(25)	152.725502	16.602281	119.782405	189.351740
PGA(50)	183.170487	7.230767	160.003465	189.752014

Tabelle A.38: DTLZ6 Ergebnisse: HV zum Referenzpunkt (5.570989, 5.873627, 5.983967)

Konvergenzmetrik	Mittelwert	Standardabweichung	Minimum	Maximum
MCO	0.564486	0.006636	0.550354	0.581179
NSGA-II(25)	0.561945	0.029125	0.465330	0.617391
NSGA-II(50)	0.517420	0.041750	0.393763	0.596663
Nelder-Mead	0.578614	0.006514	0.561423	0.600000
PSO(25)	0.126166	0.125353	0	0.422447
PSO(50)	0.005980	0.021178	0	0.171254
SMS-EMOA(25)	0.250463	0.050615	0.153490	0.439250
SMS-EMOA(50)	0.066474	0.012105	0.031563	0.098766
SPEA2(25)	0.437259	0.071630	0.283094	0.574523
SPEA2(50)	0.139394	0.019116	0.096126	0.195762
PGA(25)	0.380814	0.161083	0	0.643938
PGA(50)	0.081038	0.084337	0	0.377862

Tabelle A.39: DTLZ6 Ergebnisse: Konvergenzmetrik

Relative Dominanz	Mittelwert	Standardabweichung	Minimum	Maximum
MCO	0	0	0	0
NSGA-II(25)	0	0	0	0
NSGA-II(50)	0	0	0	0
Nelder-Mead	0	0	0	0
PSO(25)	0.063139	0.165974	0.000463	0.992647
PSO(50)	0.885378	0.223436	0.002451	0.999535
SMS-EMOA(25)	0	0	0	0
SMS-EMOA(50)	0.019485	0.082060	0	0.636364
SPEA2(25)	0	0	0	0
SPEA2(50)	0	0	0	0
PGA(25)	0.000240	0.001556	0	0.014228
PGA(50)	0.031758	0.115443	0	0.988701

Tabelle A.40: DTLZ6 Ergebnisse: Relative Dominanz

A.9 DTLZ7

Anzahl der Pareto-Punkte	Mittelwert	Standardabweichung	Minimum	Maximum
MCO	22.61	6.12	10	44
NSGA-II(25)	18.20	18.07	2	71
NSGA-II(50)	228.61	169.57	16	540
Nelder-Mead	18.20	5.71	6	38
PSO(25)	239.09	101.21	6	454
PSO(50)	875.78	373.88	230	1593
SMS-EMOA(25)	224.50	85.15	20	346
SMS-EMOA(50)	1332.46	77.75	952	1522
SPEA2(25)	148.07	76.41	12	267
SPEA2(50)	1062.20	165.50	619	1393
PGA(25)	31.34	16.28	2	81
PGA(50)	360.07	119.02	130	626

Tabelle A.41: DTLZ7 Ergebnisse: Anzahl der Pareto-Punkte

Hypervolumen	Mittelwert	Standardabweichung	Minimum	Maximum
MCO	95.306212	2.615460	88.616735	101.599139
NSGA-II(25)	105.005831	1.304352	103.651053	109.771146
NSGA-II(50)	105.958379	2.071200	104.413148	111.830015
Nelder-Mead	82.557254	4.281391	71.643685	93.007425
PSO(25)	108.896000	1.607373	106.019670	113.262911
PSO(50)	111.227503	1.343366	107.650209	113.662479
SMS-EMOA(25)	107.278683	2.128091	104.413155	113.814807
SMS-EMOA(50)	108.458627	1.981479	106.0225	114.041657
SPEA2(25)	106.773799	1.992259	104.413094	112.588170
SPEA2(50)	108.966495	2.290204	106.019635	113.989485
PGA(25)	103.572428	3.945722	86.053644	109.622384
PGA(50)	108.431554	1.994818	105.119981	113.494459

Tabelle A.42: DTLZ7 Ergebnisse: Hypervolumen zum Referenzpunkt (2, 2, 32.103289)

Konvergenzmetrik	Mittelwert	Standardabweichung	Minimum	Maximum
MCO	0.133660	0.032627	0.054098	0.238847
NSGA-II(25)	0.000085	0.000290	0	0.001947
NSGA-II(50)	0.000022	0.000103	0	0.000882
Nelder-Mead	0.161624	0.037660	0.068584	0.252931
PSO(25)	0.000108	0.000172	0	0.000982
PSO(50)	0.000051	0.000051	0.000002	0.000237
SMS-EMOA(25)	0.000038	0.000103	0	0.000797
SMS-EMOA(50)	0.000008	0.000008	0	0.000047
SPEA2(25)	0.000044	0.000087	0	0.000574
SPEA2(50)	0.000015	0.000022	0	0.000114
PGA(25)	0.005949	0.008792	0.000001	0.044315
PGA(50)	0.000043	0.000086	0	0.000445

Tabelle A.43: DTLZ7 Ergebnisse: Konvergenzmetrik

Relative Dominanz	Mittelwert	Standardabweichung	Minimum	Maximum
MCO	0	0	0	0
NSGA-II(25)	0.000111	0.000492	0	0.003803
NSGA-II(50)	0.021710	0.022537	0	0.091584
Nelder-Mead	0	0	0	0
PSO(25)	0.060684	0.033586	0.006733	0.134903
PSO(50)	0.225647	0.094934	0.046892	0.407811
SMS-EMOA(25)	0.041561	0.019690	0	0.0841580
SMS-EMOA(50)	0.361734	0.049189	0.275071	0.498331
SPEA2(25)	0.018374	0.013781	0	0.062630
SPEA2(50)	0.252474	0.051231	0.129793	0.364748
PGA(25)	0.000207	0.000696	0	0.005567
PGA(50)	0.017498	0.015736	0	0.082681

Tabelle A.44: DTLZ7 Ergebnisse: Relative Dominanz

A.10 C1-DTLZ1

Anzahl der PP	Mittelwert	Stdabw	Minimum	Maximum	erfolgreiche Durchläufe
MCO	0	0	0	0	0
NSGA-II(25)	0	0	0	0	0
NSGA-II(50)	18.14	49.60	0	262	19
Nelder-Mead	0	0	0	0	0
PSO(25)	0.12	0.38	0	2	10
PSO(50)	1.85	4.15	0	32	62
SMS-EMOA(25)	0.04	0.20	0	1	4
SMS-EMOA(50)	0.15	0.44	0	3	13
SPEA2(25)	0.04	0.20	0	1	4
SPEA2(50)	0.15	0.39	0	2	14
PGA(25)	6.35	16.82	0	85	22
PGA(50)	603.30	85.42	0	0	99

Tabelle A.45: C1-DTLZ1-Ergebnisse: Anzahl der Pareto-Punkte

Hypervolumen	Mittelwert	Standardabweichung	Minimum	Maximum
MCO	0	0	0	0
NSGA-II(25)	0	0	0	0
NSGA-II(50)	0.459480	0.953841	0	2.539108
Nelder-Mead	0	0	0	0
PSO(25)	0.243806	0.736843	0	2.870134
PSO(50)	1.523359	1.203006	0	2.971734
SMS-EMOA(25)	0.095116	0.468402	0	2.420845
SMS-EMOA(50)	0.306876	0.798548	0	2.586316
SPEA2(25)	0.095921	0.472484	0	2.457633
SPEA2(50)	0.335299	0.835548	0	2.538698
PGA(25)	0.568950	1.079789	0	3.099894
PGA(50)	3.296952	0.361857	0	3.467655

Tabelle A.46: C1-DTLZ1-Ergebnisse: HV zum Referenzpunkt (1.47823, 1.49203, 1.59772)

Konvergenzmetrik	Mittelwert	Standardabweichung	Minimum	Maximum
MCO	keine Angabe	keine Angabe	keine Angabe	keine Angabe
NSGA-II(25)	keine Angabe	keine Angabe	keine Angabe	keine Angabe
NSGA-II(50)	0.002405	0.002007	0.000031	0.006283
Nelder-Mead	keine Angabe	keine Angabe	keine Angabe	keine Angabe
PSO(25)	0.002962	0.003956	0	0.011168
PSO(50)	0.000710	0.001548	0	0.006634
SMS-EMOA(25)	0.002668	0.002495	0.000223	0.006153
SMS-EMOA(50)	0.005880	0.005443	0.000255	0.018916
SPEA2(25)	0.002265	0.003535	0.000076	0.007548
SPEA2(50)	0.002361	0.001827	0.000023	0.006199
PGA(25)	0.002087	0.003205	0.000001	0.011579
PGA(50)	0.000043	0.000045	0.000004	0.000433

Tabelle A.47: C1-DTLZ1-Ergebnisse: Konvergenzmetrik

Relative Dominanz	Mittelwert	Standardabweichung	Minimum	Maximum
MCO	0	0	0	0
NSGA-II(25)	0	0	0	0
NSGA-II(50)	0.005026	0.029310	0	0.230068
Nelder-Mead	0	0	0	0
PSO(25)	0.000084	0.000371	0	0.001901
PSO(50)	0.006810	0.050031	0	0.500000
SMS-EMOA(25)	0.000016	0.000157	0	0.001570
SMS-EMOA(50)	0.000098	0.000392	0	0.001754
SPEA2(25)	0.000015	0.000151	0	0.001511
SPEA2(50)	0.005052	0.049996	0	0.500000
PGA(25)	0.005692	0.018484	0	0.094612
PGA(50)	0.977207	0.104357	0	1

Tabelle A.48: C1-DTLZ1-Ergebnisse: Relative Dominanz

A.11 C2-DTLZ2

Anzahl der Pareto-Punkte	Mittelwert	Standardabweichung	Minimum	Maximum
MCO	73.31	6.94	54	88
NSGA-II(25)	151.85	17.80	104	206
NSGA-II(50)	551.63	57.62	430	679
Nelder-Mead	64.23	8.21	49	87
PSO(25)	151.86	14.85	89	184
PSO(50)	369.71	24.94	318	431
SMS-EMOA(25)	311.15	17.30	271	356
SMS-EMOA(50)	1053.49	30.56	973	1122
SPEA2(25)	174.20	20.54	128	240
SPEA2(50)	454.29	52.91	353	576
PGA(25)	156.29	22.36	102	202
PGA(50)	706.68	63.37	516	856

Tabelle A.49: C2-DTLZ2-Ergebnisse: Anzahl der Pareto-Punkte

Hypervolumen	Mittelwert	Standardabweichung	Minimum	Maximum
MCO	396.341212	0.031219	396.244788	396.393175
NSGA-II(25)	396.265999	0.156993	395.683069	396.433392
NSGA-II(50)	396.445216	0.035504	396.210652	396.468339
Nelder-Mead	395.907238	0.209366	395.315516	396.236997
PSO(25)	396.410003	0.053614	396.117219	396.457150
PSO(50)	396.460638	0.005938	396.435002	396.467844
SMS-EMOA(25)	396.469033	0.001497	396.464430	396.471859
SMS-EMOA(50)	396.478994	0.000374	396.478042	396.480047
SPEA2(25)	396.411508	0.031288	396.259197	396.449404
SPEA2(50)	396.464523	0.003954	396.449585	396.472090
PGA(25)	396.334737	0.188328	395.498364	396.461877
PGA(50)	396.469802	0.011143	396.407142	396.478489

Tabelle A.50: C2-DTLZ2-Ergebnisse: HV zum Referenzpunkt (10.378906, 9.487546, 4.026926)

Konvergenzmetrik	Mittelwert	Standardabweichung	Minimum	Maximum
MCO	0.006238	0.002804	0.000955	0.015140
NSGA-II(25)	0.005859	0.007024	0.000375	0.044607
NSGA-II(50)	0.001145	0.001161	0.000101	0.006248
Nelder-Mead	0.009231	0.005192	0.001295	0.026112
PSO(25)	0.004131	0.002838	0.000130	0.009816
PSO(50)	0.000592	0.000801	0.000032	0.003797
SMS-EMOA(25)	0.000413	0.000343	0.000020	0.001503
SMS-EMOA(50)	0.000074	0.000066	0.000003	0.000298
SPEA2(25)	0.020202	0.016309	0.000528	0.068317
SPEA2(50)	0.010077	0.007157	0.001098	0.038915
PGA(25)	0.000900	0.001016	0.000035	0.007058
PGA(50)	0.000050	0.000076	0.000001	0.000453

Tabelle A.51: C2-DTLZ2-Ergebnisse: Konvergenzmetrik

Relative Dominanz	Mittelwert	Standardabweichung	Minimum	Maximum
MCO	0.001135	0.000817	0	0.003085
NSGA-II(25)	0.009534	0.008816	0	0.038593
NSGA-II(50)	0.108539	0.044380	0.017259	0.205226
Nelder-Mead	0.000996	0.001020	0	0.004352
PSO(25)	0.014499	0.005028	0.003995	0.027683
PSO(50)	0.063118	0.012420	0.035025	0.093208
SMS-EMOA(25)	0.064095	0.011903	0.0323960	0.102229
SMS-EMOA(50)	0.395289	0.037523	0.307766	0.495322
SPEA2(25)	0.004155	0.003636	0	0.017233
SPEA2(50)	0.037267	0.015511	0.007277	0.082520
PGA(25)	0.022625	0.017331	0	0.061905
PGA(50)	0.278749	0.048835	0.125194	0.365385

Tabelle A.52: C2-DTLZ2-Ergebnisse: Relative Dominanz

A.12 C3-DTLZ1

Anzahl der Pareto-Punkte	Mittelwert	Standardabweichung	Minimum	Maximum
MCO	19.11	6.27	3	40
NSGA-II(25)	35.63	13.48	12	72
NSGA-II(50)	66.33	26.46	29	151
Nelder-Mead	24.75	9.09	5	49
PSO(25)	7.87	4.96	1	26
PSO(50)	5.79	3.95	1	21
SMS-EMOA(25)	24.56	8.22	8	51
SMS-EMOA(50)	42.52	14.00	15	75
SPEA2(25)	39.44	14.04	16	79
SPEA2(50)	48.96	16.89	19	99
PGA(25)	35.84	19.08	8	109
PGA(50)	184.86	30.05	132	344

Tabelle A.53: C3-DTLZ1-Ergebnisse: Anzahl der Pareto-Punkte

Hypervolumen	Mittelwert	Standardabweichung	Minimum	Maximum
MCO	71287023	150430.69	70883464	71578521
NSGA-II(25)	71608115	87507.62	71234807	71679810.
NSGA-II(50)	71681189	4780.97	71653489	71683193
Nelder-Mead	70690184	360499.47	69647861	71416775
PSO(25)	71616391	102621.23	71102942	71682573
PSO(50)	71665281	36384.83	71522216	71683197
SMS-EMOA(25)	71681911	7762.22	71605162	71683221
SMS-EMOA(50)	71683146	124.53	71682799	71683240
SPEA2(25)	71679465	9702.78	71593975	71683205
SPEA2(50)	71683151	177.78	71682292	71683240
PGA(25)	71677409	25833.13	71466856	71683240
PGA(50)	71683240	5.49	71683185	71683240

Tabelle A.54: C3-DTLZ1-Ergebnisse: HV zum Referenzpunkt (450.818144, 352.174972, 451.5)

Konvergenzmetrik	Mittelwert	Standardabweichung	Minimum	Maximum
MCO	0.098641	0.032313	0.030803	0.185115
NSGA-II(25)	0.087216	0.086384	0.000138	0.608644
NSGA-II(50)	0.052934	0.066431	0.000001	0.288138
Nelder-Mead	0.127026	0.041047	0.035058	0.232050
PSO(25)	0.039302	0.053792	0	0.337266
PSO(50)	0.032251	0.052872	0	0.283103
SMS-EMOA(25)	0.011212	0.021256	0.000075	0.173614
SMS-EMOA(50)	0.002942	0.004712	0.000007	0.027213
SPEA2(25)	0.088879	0.062634	0.000706	0.307015
SPEA2(50)	0.016662	0.021075	0.000188	0.098128
PGA(25)	0.001804	0.004541	0	0.024924
PGA(50)	0.0000004	0.000003	0	0.000032

Tabelle A.55: C3-DTLZ1-Ergebnisse: Konvergenzmetrik

Relativ Dominanz	Mittelwert	Standardabweichung	Minimum	Maximum
MCO	0	0	0	0
NSGA-II(25)	0.00046	0.00211	0	0.01476
NSGA-II(50)	0.065586	0.083127	0	0.395522
Nelder-Mead	0	0	0	0
PSO(25)	0.000777	0.002045	0	0.011111
PSO(50)	0.005142	0.003137	0	0.020325
SMS-EMOA(25)	0.001562	0.002826	0	0.011194
SMS-EMOA(50)	0.014348	0.011162	0	0.065657
SPEA2(25)	0.000309	0.001233	0	0.005848
SPEA2(50)	0.006519	0.008925	0	0.040936
PGA(25)	0.017257	0.030389	0	0.144279
PGA(50)	0.888039	0.083117	0.578358	0.994444

Tabelle A.56: C3-DTLZ1-Ergebnisse:

A.13 C3-DTLZ4

Anzahl der PP	Mittelwert	Stdabw	Minimum	Maximum	erfolgreiche Durchläufe
MCO	0.80	0.89	0	4	54
NSGA-II(25)	74.77	45.95	0	160	93
NSGA-II(50)	344.91	120.04	0	741	99
Nelder-Mead	0.81	1.20	0	5	44
PSO(25)	41.13	53.83	0	200	61
PSO(50)	200.92	261.27	0	997	91
SMS-EMOA(25)	110.84	36.67	0	287	99
SMS-EMOA(50)	277.67	17.39	241	323	100
SPEA2(25)	125.84	53.76	0	263	94
SPEA2(50)	308.25	15.35	270	344	100
PGA(25)	22.52	24.73	0	110	68
PGA(50)	58.43	57.00	5	512	100

Tabelle A.57: C3-DTLZ4-Ergebnisse: Anzahl der Pareto-Punkte

Hypervolumen	Mittelwert	Standardabweichung	Minimum	Maximum
MCO	4.420651	4.067638	0	11.014003
NSGA-II(25)	10.402781	3.565036	0	14.743442
NSGA-II(50)	14.113087	2.282322	0	15.432786
Nelder-Mead	3.572374	4.143970	0	10.841558
PSO(25)	5.979409	5.024322	0	14.069841
PSO(50)	10.517186	3.841430	0	15.097285
SMS-EMOA(25)	14.411622	2.202050	0	15.509386
SMS-EMOA(50)	15.765764	0.058704	15.554515	15.873893
SPEA2(25)	13.789765	3.807490	0	15.508049
SPEA2(50)	15.735701	0.060792	15.581304	15.856645
PGA(25)	6.465546	4.806448	0	14.113784
PGA(50)	12.488050	2.264306	7.722784	14.952721

Tabelle A.58: C3-DTLZ4-Ergebnisse: HV zum Referenzpunkt (2.658299, 2.658222, 2.65827)

Konvergenzmetrik	Mittelwert	Standardabweichung	Minimum	Maximum
MCO	0.003551	0.004229	0	0.020093
NSGA-II(25)	0.009375	0.008585	0.000002	0.029242
NSGA-II(50)	0.008828	0.007411	0.000029	0.030191
Nelder-Mead	0.003273	0.004246	0	0.017818
PSO(25)	0.011536	0.009353	0	0.025797
PSO(50)	0.005571	0.008014	0.000019	0.024059
SMS-EMOA(25)	0.007033	0.004758	0.000316	0.023475
SMS-EMOA(50)	0.002051	0.000637	0.000799	0.004476
SPEA2(25)	0.008489	0.006210	0.000432	0.027987
SPEA2(50)	0.001983	0.000510	0.001125	0.003456
PGA(25)	0.005749	0.004845	0.000003	0.037479
PGA(50)	0.002538	0.003390	0.000007	0.019803

Tabelle A.59: C3-DTLZ4-Ergebnisse: Konvergenzmetrik

Relative Dominanz	Mittelwert	Standardabweichung	Minimum	Maximum
MCO	0.000460	0.000866	0	0.003361
NSGA-II(25)	0.025074	0.023823	0	0.146099
NSGA-II(50)	0.141767	0.064130	0	0.365854
Nelder-Mead	0.000446	0.000904	0	0.003456
PSO(25)	0.023858	0.038568	0	0.225895
PSO(50)	0.134790	0.095723	0	0.569510
SMS-EMOA(25)	0.047278	0.015365	0	0.094812
SMS-EMOA(50)	0.241468	0.042308	0.110141	0.350904
SPEA2(25)	0.048358	0.018463	0	0.083333
SPEA2(50)	0.275537	0.046482	0.136333	0.392593
PGA(25)	0.011340	0.015495	0	0.069525
PGA(50)	0.049626	0.042414	0.004255	0.243570

Tabelle A.60: C3-DTLZ4-Ergebnisse: Relative Dominanz

A.14 flat-ZDT6

Anzahl der Pareto-Punkte	Mittelwert	Standardabweichung	Minimum	Maximum
MCO	46.17	42.06	2	198
NSGA-II(25)	161.38	95.48	3	325
NSGA-II(50)	416.81	296.54	5	1300
Nelder-Mead	53.52	42.26	1	150
PSO(25)	55.36	66.51	3	463
PSO(50)	54.50	48.04	8	227
SMS-EMOA(25)	86.58	144.24	4	650
SMS-EMOA(50)	38.55	90.01	7	854
SPEA2(25)	87.64	137.26	5	650
SPEA2(50)	29.08	28.20	9	242
PGA(25)	76.48	89.72	3	325
PGA(50)	55.61	113.24	4	599

Tabelle A.61: flat-ZDT6-Ergebnisse: Anzahl der Pareto-Punkte

Hypervolumen	Mittelwert	Standardabweichung	Minimum	Maximum
MCO	5.439523	0.915289	2.232783	7.395783
NSGA-II(25)	5.540812	1.819436	1.976304	8.126810
NSGA-II(50)	6.999670	1.333875	2.016538	8.164894
Nelder-Mead	4.415230	1.195381	1.998117	6.773902
PSO(25)	6.535361	0.680076	4.441467	7.904784
PSO(50)	7.469145	0.341700	6.278610	8.008492
SMS-EMOA(25)	7.074479	1.258730	2.016376	8.014676
SMS-EMOA(50)	7.926995	0.163489	6.663058	8.070384
SPEA2(25)	6.929150	1.181534	2.016155	8.006519
SPEA2(50)	7.935765	0.108597	7.456315	8.069932
PGA(25)	5.982516	1.575718	1.935086	8.130620
PGA(50)	7.363309	0.573760	5.149125	8.160894

Tabelle A.62: flat-ZDT6-Ergebnisse: Hypervolumen zum Referenzpunkt (2, 4.980291)

Konvergenzmetrik	Mittelwert	Standardabweichung	Minimum	Maximum
MCO	0.241206	0.19725	0.00422	0.665585
NSGA-II(25)	0.18932	0.181629	0.000001	0.647017
NSGA-II(50)	0.057282	0.108681	0	0.439101
Nelder-Mead	0.458671	0.244065	0.000049	0.735676
PSO(25)	0.069845	0.110821	0.000493	0.644289
PSO(50)	0.00787	0.009697	0.000327	0.060848
SMS-EMOA(25)	0.046026	0.10969	0.000085	0.51405
SMS-EMOA(50)	0.005262	0.006797	0.000102	0.055764
SPEA2(25)	0.050735	0.104546	0.000391	0.512313
SPEA2(50)	0.005369	0.005197	0.00005	0.023412
PGA(25)	0.136855	0.174816	0.000017	0.652175
PGA(50)	0.017914	0.056649	0.000001	0.355189

Tabelle A.63: flat-ZDT6-Ergebnisse: Konvergenzmetrik

Relative Dominanz	Mittelwert	Standardabweichung	Minimum	Maximum
MCO	0.002044	0.007687	0	0.041667
NSGA-II(25)	0.070075	0.177664	0	0.752577
NSGA-II(50)	0.378028	0.423948	0	0.994030
Nelder-Mead	0.001813	0.011449	0	0.083333
PSO(25)	0.006290	0.016479	0	0.100000
PSO(50)	0.024287	0.038096	0	0.173913
SMS-EMOA(25)	0.018717	0.028892	0	0.150000
SMS-EMOA(50)	0.100170	0.110206	0	0.562500
SPEA2(25)	0.017941	0.032213	0	0.227273
SPEA2(50)	0.106830	0.117782	0	0.481481
PGA(25)	0.039705	0.104041	0	0.662651
PGA(50)	0.234099	0.236956	0	0.970000

Tabelle A.64: flat-ZDT6-Ergebnisse: Relative Dominanz

A.15 flat-DTLZ1

Anzahl der Pareto-Punkte	Mittelwert	Standardabweichung	Minimum	Maximum
MCO	126.64	57.11	31	300
NSGA-II(25)	243.02	62.49	84	325
NSGA-II(50)	617.46	192.87	237	1205
Nelder-Mead	115.18	38.30	40	179
PSO(25)	126.28	70.60	10	498
PSO(50)	126.63	84.67	13	467
SMS-EMOA(25)	205.39	107.87	46	480
SMS-EMOA(50)	196.16	159.01	86	1417
SPEA2(25)	150.85	105.06	41	650
SPEA2(50)	140.27	67.62	65	489
PGA(25)	153.29	81.70	19	325
PGA(50)	223.66	186.23	15	1010

Tabelle A.65: flat-DTLZ1-Ergebnisse: Anzahl der Pareto-Punkte

Hypervolumen	Mittelwert	Standardabweichung	Minimum	Maximum
MCO	25.852939	0.276971	25.195883	26.376241
NSGA-II(25)	25.377718	0.566396	23.977674	26.810749
NSGA-II(50)	26.245587	0.337559	25.174598	26.836085
Nelder-Mead	25.289852	0.349746	24.630673	26.070614
PSO(25)	26.342251	0.199599	25.492077	26.721557
PSO(50)	26.746951	0.089469	26.352464	26.910901
SMS-EMOA(25)	26.712165	0.183969	26.067553	26.904947
SMS-EMOA(50)	26.930892	0.033259	26.628049	26.950549
SPEA2(25)	26.607121	0.282091	24.939194	26.887591
SPEA2(50)	26.928949	0.022265	26.801477	26.950321
PGA(25)	26.004295	0.490966	24.978184	26.951635
PGA(50)	26.730628	0.260752	25.715594	26.973817

Tabelle A.66: flat-DTLZ1-Ergebnisse: zum Referenzpunkt (3, 3, 3)

Konvergenzmetrik	Mittelwert	Standardabweichung	Minimum	Maximum
MCO	0.320110	0.030055	0.238662	0.375928
NSGA-II(25)	0.341780	0.040631	0.209638	0.494818
NSGA-II(50)	0.386138	0.044643	0.290510	0.507630
Nelder-Mead	0.294118	0.019718	0.253878	0.347157
PSO(25)	0.341829	0.047362	0.082103	0.444987
PSO(50)	0.337577	0.090945	0.001739	0.476134
SMS-EMOA(25)	0.389366	0.034227	0.260123	0.456236
SMS-EMOA(50)	0.349504	0.053852	0.186377	0.461038
SPEA2(25)	0.343779	0.036343	0.247214	0.423469
SPEA2(50)	0.311363	0.047058	0.166798	0.405564
PGA(25)	0.294891	0.083437	0.009515	0.412655
PGA(50)	0.185794	0.178070	0.000024	0.530393

Tabelle A.67: flat-DTLZ1-Ergebnisse: Konvergenzmetrik

Relative Dominanz	Mittelwert	Standardabweichung	Minimum	Maximum
MCO	0.002568	0.005108	0	0.032609
NSGA-II(25)	0.001963	0.004212	0	0.026316
NSGA-II(50)	0.008379	0.010368	0	0.042553
Nelder-Mead	0.001428	0.004151	0	0.025316
PSO(25)	0.030618	0.034638	0	0.175325
PSO(50)	0.108353	0.097423	0	0.422794
SMS-EMOA(25)	0.026652	0.022891	0	0.094828
SMS-EMOA(50)	0.182542	0.109090	0.014354	0.409091
SPEA2(25)	0.023101	0.021484	0	0.128205
SPEA2(50)	0.157105	0.092825	0.015584	0.331325
PGA(25)	0.045786	0.088046	0	0.500000
PGA(50)	0.411506	0.297464	0	0.952153

Tabelle A.68: flat-DTLZ1-Ergebnisse: Relative Dominanz

A.16 deceptive-ZDT3

Anzahl der Pareto-Punkte	Mittelwert	Standardabweichung	Minimum	Maximum
MCO	26.11	3.43	15	36
NSGA-II(25)	116.38	24.97	44	173
NSGA-II(50)	460.24	92.39	187	616
Nelder-Mead	20.40	3.09	13	28
PSO(25)	58.07	8.28	28	86
PSO(50)	123.93	26.92	40	199
SMS-EMOA(25)	130.25	25.61	51	167
SMS-EMOA(50)	374.17	104.17	89	481
SPEA2(25)	112.23	22.72	50	157
SPEA2(50)	317.02	88.09	115	424
PGA(25)	90.94	26.55	15	177
PGA(50)	383.56	157.04	32	680

Tabelle A.69: deceptive-ZDT3-Ergebnisse: Anzahl der Pareto-Punkte

Hypervolumen	Mittelwert	Standardabweichung	Minimum	Maximum
MCO	6.314773	0.042893	6.193822	6.449413
NSGA-II(25)	6.295527	0.137426	5.928420	6.659547
NSGA-II(50)	6.385486	0.073891	6.040581	6.796883
Nelder-Mead	6.203812	0.068688	5.973573	6.326177
PSO(25)	6.245739	0.126337	5.881520	6.406159
PSO(50)	6.377257	0.059518	6.069588	6.525060
SMS-EMOA(25)	6.370854	0.073286	6.036231	6.481666
SMS-EMOA(50)	6.410137	0.036795	6.385515	6.549926
SPEA2(25)	6.364402	0.079133	6.015963	6.503941
SPEA2(50)	6.413905	0.042638	6.382906	6.574663
PGA(25)	6.262016	0.145582	5.684797	6.748960
PGA(50)	6.382410	0.125516	6.014290	6.776016

Tabelle A.70: deceptive-ZDT3-Ergebnisse: HV zum Referenzpunkt(1.876876, 3.258019)

Konvergenzmetrik	Mittelwert	Standardabweichung	Minimum	Maximum
MCO	0.006526	0.002706	0.002095	0.014888
NSGA-II(25)	0.004446	0.001682	0.001452	0.015036
NSGA-II(50)	0.003195	0.000623	0.000889	0.004582
Nelder-Mead	0.008755	0.004557	0.003066	0.025091
PSO(25)	0.004012	0.000494	0.002880	0.006733
PSO(50)	0.003459	0.000567	0.001882	0.004632
SMS-EMOA(25)	0.004093	0.000649	0.001375	0.006380
SMS-EMOA(50)	0.003545	0.000701	0.001436	0.004399
SPEA2(25)	0.004387	0.001439	0.001790	0.013888
SPEA2(50)	0.003461	0.000672	0.001592	0.004682
PGA(25)	0.003673	0.000872	0.000003	0.005164
PGA(50)	0.003333	0.001242	0	0.004653

Tabelle A.71: deceptive-ZDT3-Ergebnisse: Konvergenzmetrik

Relative Dominanz	Mittelwert	Standardabweichung	Minimum	Maximum
MCO	0.004385	0.004130	0	0.024390
NSGA-II(25)	0.035594	0.030631	0	0.135678
NSGA-II(50)	0.258901	0.124917	0	0.818966
Nelder-Mead	0.001594	0.003340	0	0.024390
PSO(25)	0.007035	0.004966	0	0.019737
PSO(50)	0.031910	0.013721	0	0.062612
SMS-EMOA(25)	0.038705	0.017423	0	0.102564
SMS-EMOA(50)	0.208605	0.063613	0	0.453271
SPEA2(25)	0.027398	0.011676	0	0.060976
SPEA2(50)	0.176566	0.060089	0	0.394904
PGA(25)	0.028453	0.060154	0	0.464516
PGA(50)	0.180854	0.167199	0.004115	1

Tabelle A.72: deceptive-ZDT3-Ergebnisse: Relative Dominanz

A.17 deceptive-DTLZ1

Anzahl der Pareto-Punkte	Mittelwert	Standardabweichung	Minimum	Maximum
MCO	107.28	10.04	77	128
NSGA-II(25)	199.16	21.98	125	247
NSGA-II(50)	770.29	70.06	501	928
Nelder-Mead	81.22	7.70	65	99
PSO(25)	251.16	24.86	171	287
PSO(50)	661.48	119.75	365	858
SMS-EMOA(25)	397.23	43.62	209	451
SMS-EMOA(50)	1408.10	254.98	561	1677
SPEA2(25)	282.44	44.06	182	363
SPEA2(50)	852.28	206.90	284	1235
PGA(25)	226.87	30.22	91	289
PGA(50)	979.82	100.67	300	1119

Tabelle A.73: deceptive-DTLZ1-Ergebnisse: Anzahl der Pareto-Punkte

Hypervolumen	Mittelwert	Standardabweichung	Minimum	Maximum
MCO	9.549262	0.018930	9.489734	9.588022
NSGA-II(25)	9.507132	0.035806	9.387497	9.567130
NSGA-II(50)	9.581735	0.021739	9.509890	9.612560
Nelder-Mead	9.487075	0.021940	9.416586	9.530255
PSO(25)	9.589143	0.023980	9.475918	9.614027
PSO(50)	9.618637	0.006350	9.593126	9.628539
SMS-EMOA(25)	9.614654	0.002499	9.607580	9.621043
SMS-EMOA(50)	9.624332	0.003558	9.621160	9.638221
SPEA2(25)	9.592321	0.018085	9.511012	9.615548
SPEA2(50)	9.622834	0.004670	9.612193	9.637649
PGA(25)	9.562402	0.048700	9.418446	9.613825
PGA(50)	9.620948	0.001858	9.613769	9.633601

Tabelle A.74: deceptive-DTLZ1-Ergebnisse: HV zum Referenzpunkt (2.131, 2.131, 2.131)

Konvergenzmetrik	Mittelwert	Standardabweichung	Minimum	Maximum
MCO	0.019369	0.003024	0.013762	0.026710
NSGA-II(25)	0.018336	0.009324	0.008812	0.065700
NSGA-II(50)	0.010062	0.002096	0.007981	0.025811
Nelder-Mead	0.024713	0.005884	0.014886	0.039455
PSO(25)	0.010280	0.000734	0.008843	0.012529
PSO(50)	0.008586	0.000374	0.007718	0.009788
SMS-EMOA(25)	0.010854	0.001225	0.009165	0.015577
SMS-EMOA(50)	0.009100	0.000391	0.008536	0.010574
SPEA2(25)	0.014968	0.004005	0.009510	0.035210
SPEA2(50)	0.010627	0.001687	0.008434	0.019227
PGA(25)	0.010009	0.001521	0.007693	0.015998
PGA(50)	0.007992	0.000279	0.007437	0.009427

Tabelle A.75: deceptive-DTLZ1-Ergebnisse: Konvergenzmetrik

Relative Dominanz	Mittelwert	Standardabweichung	Minimum	Maximum
MCO	0.006043	0.00178	0.000631	0.010434
NSGA-II(25)	0.016368	0.009005	0.001569	0.046768
NSGA-II(50)	0.093989	0.027288	0.023372	0.154264
Nelder-Mead	0.004351	0.001472	0.000631	0.010758
PSO(25)	0.022968	0.006413	0.005018	0.039561
PSO(50)	0.093510	0.021523	0.056180	0.171119
SMS-EMOA(25)	0.063884	0.010593	0.041078	0.097561
SMS-EMOA(50)	0.315340	0.027055	0.262290	0.392056
SPEA2(25)	0.027095	0.008079	0.010526	0.048212
SPEA2(50)	0.144780	0.016852	0.108151	0.189255
PGA(25)	0.025238	0.012739	0.003659	0.056629
PGA(50)	0.186434	0.031330	0.074540	0.245919

Tabelle A.76: deceptive-DTLZ1-Ergebnisse: Relative Dominanz

Anhang B: Parametrisierungen der Optimierungsverfahren

B.1 MCO

Parameter	Wert
Anzahl der Punkte	300
Methode	gleichverteilt

B.2 NSGA-II

Parameter	NSGA-II(25)	NSGA-II(50)
Populationsgröße	25	50
Generationen	25	50
Austausch pro Generation	50%	50%
Kreuzungswahrscheinlichkeit	1	1
Mutationswahrscheinlichkeit	0.2	0.2
Kreuzungsindex	15	15
Mutationsindex	20	20

B.3 Nelder-Mead

Parameter	Wert
max. Iterationen	90
Pareto-Scan	10
Zufällige Startpunkte	38
Reflexionsfaktor	1
Expansionsfaktor	2
Kontraktionsfaktor	0.5

B.4 PSO

Parameter	PSO(25)	PSO(50)
Iterationen	25	50
Partikel	25	50
Nachbarschaftsgröße	10	25
Konstanten $c_i = 1, 2, 3$	2	2
Schranke ω_{min}	0.1	0.1
Schranke ω_{max}	1	1

B.5 SMS-EMOA

Parameter	SMS-EMOA(25)	SMS-EMOA(50)
Populationsgröße	25	50
Generationen	25	50
Austausch pro Generation	50%	50%
Kreuzungswahrscheinlichkeit	1	1
Mutationswahrscheinlichkeit	0.2	0.2
Kreuzungsindex	15	15
Mutationsindex	20	20

B.6 SPEA2

Parameter	SPEA2(25)	SPEA2(50)
Populationsgröße	25	50
Generationen	25	50
Austausch pro Generation	50%	50%
Kreuzungswahrscheinlichkeit	1	1
Mutationswahrscheinlichkeit	0.2	0.2
Kreuzungsindex	15	15
Mutationsindex	20	20

B.7 PGA

Parameter	PGA(25)	PGA(50)
Populationsgröße	25	50
Generationen	25	50
Austausch pro Generation	50%	50%
max. Cluster	100	100
max. Subprobleme	3	3

Erklärung

Hiermit erkläre ich, dass ich meine Arbeit selbstständig verfasst, keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt und die Arbeit noch nicht anderweitig für Prüfungszwecke vorgelegt habe.

Stellen, die wörtlich oder sinngemäß aus Quellen entnommen wurden, sind als solche kenntlich gemacht.

Mittweida, 21. Dezember 2016