Kriener, Yvonne

Bewertung von Optionen in der Lebensversicherung

Diplomarbeit

Hochschule Mittweida

University of Applied Sciences

Fachbereich: Mathematik, Physik, Informatik
Studiengang: Angewandte Mathematik

Mittweida, 09.03.2009

Erstprüfer: Herr Dipl. Math. Fischer, Bernd
Zweitprüfer: Frau Prof. Dr. rer. nat. Fischer, Regina

Danksagung

An dieser Stelle möchte ich allen meinen Dank aussprechen, die mir in meiner Diplomzeit zur Seite gestanden haben und mich bei meiner Arbeit tatkräftig unterstützt haben.

Ein besonderen Dank gilt meinem Betreuer Herr Bernd Fischer von der Hochschule Mittweida für die intensive und fachliche Unterstützung. Mit sachkundigen und richtungsweisenden Gesprächen und konstruktiver Kritik hat er mich in jeder Phase der Arbeit begleitet und zeigte auch in schwierigen Momenten Geduld und Verständnis.

Ein Dankeschön möchte ich auch an Frau Regina Fischer aussprechen, die bereit war, die Rolle des zweiten Betreuers zu übernehmen.

Ich möchte mich ebenso bei Frau Andrea Trautmann und Dr. Burkhard Disch sowie Jörg Kohlhepp, Olaf Weber, Karin Van de Put und Susanne Mues für den innovativen Gedankenaustausch und der Bereitstellung des Themas bedanken.

Weiteren Dank gilt meiner Familie, die jeder Zeit mit moralischem Beistand und Ratschlägen präsent waren. Insbesondere möchte ich mich bei meiner Mutter Gabriela Jähnel bedanken, ohne die ich mein Studium nicht möglich gewesen wäre.

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Einleitung

Der Titel der vorliegenden Diplomarbeit lautet ***Bewertung von Optionen in der Lebensversicherung***. In diesem Kapitel wird zunächst ein Überblick des Themenbereichs gegeben und die in dieser Arbeit zu Grunde liegende Herangehensweise erläutert.

1.1 Motivation

Lebensversicherungsprodukte waren und sind ein wichtiger Bestandteil der privaten Altersvorsorge in Deutschland und der Wettbewerb in der Lebensversicherungsbranche steigt stetig an. Daher gewinnen Optionen, die in den Produkten enthalten sind, immer mehr an Bedeutung, um dem Versicherungsnehmer mehr präsentieren zu können. Das heißt, es werden mehr und mehr Optionen und Garantien angeboten, um dem Versicherungsnehmer mehr Sicherheit und Flexibilität gewährleisten zu können.
Dabei steht seit geraumer Zeit die Frage im Raum, wie kostenintensiv Optionen und Garantien für ein Versicherungsunternehmen sein können, wenn der Versicherungsnehmer diese auch ausübt. Denn dahinter verbergen sich verschiedene Risiken, die nicht unterschätzt werden sollten.

Das Thema von Optionen in Lebensversicherungsverträgen wird schon seit längerer Zeit betrachtet. Dabei ist es auffällig, dass die Beachtung dieser Thematik in Deutschland später einsetzte. In Großbritannien wurde beispielsweise schon Ende der 80er Jahre darauf eingegangen, da hier die Entwicklung der Lebensversicherungsbranche und ihre Produkte deutlich weiter fortgeschritten waren und auch Optionen eine wesentliche Rolle spielten. Das mag daran gelegen haben, dass dort ein wesentlich weniger reguliertes Umfeld herrschte. Hierzulande setzte diese Entwicklung verstärkt erst 1994 im Zuge der Umsetzung der Dritten EG-Richtlinie Lebensversicherung ein.

Die ersten Betrachtungen auf diesem Gebiet in Deutschland kamen von Peter Günther, der 1997 für seine Dissertation den 2. SCOR-Preis für Aktuarwissenschaften erlangte, aber schon 1995 sein Werk „Optionen in der Lebensversicherung" veröffentlichte. Dabei versuchte er mathematisch zu erfassen, in welchen Lebenssituationen ein Versicherungsnehmer seinen Todesfallschutz aufstockt. Dies entspricht im wesentlichen der hier betrachteten Nachversicherungsgarantie, die bei Günther allerdings nicht an objektive Ereignisse gebunden ist.
Die Untersuchung der Rückkaufsoption mit ihren Auswirkungen seitens des Versicherungsnehmers und des Lebensversicherungsunternehmens wurde von Rüdiger Gebhard in seiner Veröffentlichung „Risiken aus Rückkaufsoptionen in Lebensversicherungsverträgen" von 1997 vorgenommen. Er führte den „kritischen Rückkaufswert" ein und verglich diesen mit dem tatsächlich ausgezahlten Rückkaufswert, allerdings ohne eine Bewertung der eigentlichen Option durchzuführen.
Wolfgang Gerdes veröffentlichte 1997 in der Fachzeitschrift „Der Aktuar" seine Arbeit „Bewertung von Finanzoptionen in Lebensversicherungsprodukten", in der er verschiedene Optionen finanzmathematisch mittels Black-Scholes-Modell bewertet hat. Dabei merkte er an, dass die Vereinfachung für das Modell durch die Annahme, die zu Grunde gelegte Größe folge einer geometrischen Bewegung, problematisch zu betrachten ist. Die Ergebnisse seiner worst-case Untersuchungen zeigten, welche Ausmaße der Wert einer Option haben kann. Dabei bemerkte er kritisch, dass weitere Untersuchungen über die Ausübungswahrscheinlichkeiten gemacht werden müssten.
Mit dem 1999 veröffentlichtem Werk „Abrufoptionen bei Aktienindexgebundenen Lebens- und Rentenversicherungen" untersuchten Jochen Ruß und Frank A. Schittenhelm eine flexible Ablaufphase nach der regulären Versicherungsdauer. Dabei betrachten sie die Fortführung als eine eigene Versicherung, wobei auf die Überschussbeteiligung besonders eingegangen wurde, ohne den eigentlichen Wert der Option zu prüfen.
Dies gilt ebenso für die Arbeit „Optionen in Lebensversicherungsverträgen" von Wolfgang Christian Held aus dem Jahre 1999. Dort wurde eine Auflistung der zu der Zeit angebotenen Optionen vorgenommen, wobei sie die gebräuchlichsten näher erläuterten und in verschiedene Optionstypen klassifizierten.
Im Jahre 1999 veröffentlichten Hans-Otto Herr und Markus Kreer die Studie „Zur Bewertung von Optionen und Garantien bei Lebensversicherungen", in der sie verschiedene eingebettete Optionen in üblichen deutschen Lebens-

versicherungsprodukten analysierten. Dazu zählten sie die Möglichkeiten der vorzeitigen Kündigung und der Beitragsfreistellung, sowie der garantierte Rechnungszins in einer Lebensversicherung mit Todes- und Erlebensfallleistung, wobei die Überschüsse als deterministisch angenommen wurden. Sie unterstellten eine stochastische Zinsentwicklung und verwendeten dabei das Einfaktor-Modell von Fabozzi, Kalotay und Williams. Der Optionspreis wurde dann bestimmt, indem sie die Preise für das Produkt mit und ohne implizite Option verglichen. Aber in dieser Arbeit besteht ein systematischer Fehler, denn es wurde die Todesfallleistung eliminiert. Damit vernachlässigten sie die Sterbewahrscheinlichkeiten keine Rolle mehr und der Versicherungsvertrag endet nicht, wenn die versicherte Person stirbt. Somit ergab sich bei den Ergebnissen der Untersuchungen von Herr und Kreer ein zu hoch angesetzter Optionspreis.
In den Jahren von 1999 bis 2002 veröffentlichten Tobias Dillmann und Jochen Ruß mehrere Werke zu diesem Thema. Sie berechneten den Preis verschiedener Optionen direkt mit finanzmathematischen Methoden, wobei sie stochastische Zinsen verwendeten, die mittels des Zinsmodells von Hull und White hergeleitet wurden. 1999 erschien dazu die Arbeit „Implizite Optionen in Lebensversicherungsprodukten“. Es wurde eine quantitative Analyse am Beispiel des Kapitalwahlrechts durchgeführt, die ebenso wie bei Gerdes 1997 das Ergebnis zu Tage brachte, dass abhängig von der Kapitalmarktlage eine solche Option sehr wertvoll sein kann. Weitere Überarbeitungen und Neufassungen wurden 2000 und 2001 zu Tage gebracht, wobei auch auf die Abrufoption einer kapitalbildenden Lebensversicherung eingegangen wurde. Dabei konnte eine deterministische Überschussbeteiligung angenommen und die Sterbewahrscheinlichkeit im Modell mit berücksichtigt werden. Das Ergebnis ihrer Untersuchungen ergab, dass das finanzielle Risiko für das Lebensversicherungsunternehmen erheblich sein kann. Es folgten internationale Vorstellungen sowie der „Outstanding Paper Award“. Abschließend wurde 2002 von Tobias Dillmann das Buch „Modelle zur Bewertung von Optionen in Lebensversicherungsverträgen“ veröffentlicht.
Jens Haase brachte 2000 in seinem Artikel „Optionspreise technisch einperiodiger Versicherungen“ in „Der Aktuar“ einen neuen Ansatz zur Bewertung der Erhöhungsoption einer Risikoversicherung. Darin entwickelte er eine Optionsprämie, in der die Prämie für die zu Grunde liegende Versicherung, der Zinssatz und die Wahrscheinlichkeit für den Versicherungsfall verwendet wurden. Allerdings steht hier die Frage offen, ob diese Herangehensweise auch auf andere Optionen übertragbar wäre.

Ende 2003 gründete sich zu dem Thema „Bewertung von Optionen“ eine Arbeitsgruppe der Deutschen Aktuarsvereinigung (DAV). Sie beschränkte sich dabei auf die Optionen mit Finanzcharakter, insbesondere auf die Rückkaufsoption und das Kapitalwahlrecht. Es wurden bis 2007 mehrere Publikationen heraus gegeben mit dem Ergebnis, dass der ermittelte Wert einer Option in der Regel zu hoch ausfallen dürfte.

Innerhalb der Bewertung von Optionen in der Lebensversicherung findet sich die Black-Scholes-Formel wieder. Dabei handelt es sich um eine geschlossene Formel um Optionen als Finanzinstrument zu bewerten. Resultierend aus dem Black-Scholes-Modell wurde die zugehörige Formel in den 1970er Jahren entwickelt. Fischer Black, Myron Scholes und Robert Merton waren an diesem Durchbruch für die Wirtschaftswissenschaften beteiligt. Doch der Name der Name des Modells ist nur auf Black und Scholes zurück zuführen, da diese das entscheidende Werk veröffentlichten.
Mit der geschlossenen Formel ist Black und Scholes ein einfacher Weg gelungen, wie Optionen in der Finanzwelt bewertet werden können, ohne einen hohen numerischen Aufwand in Kauf nehmen zu müssen. Dieser Erfolg wurde erst 1997 mit dem Nobelpreis für Wirtschaftswissenschaften ausgezeichnet. Da Fischer Black bereits 1995 verstarb, wurde der Preis an Myron Scholes und Robert Merton verliehen.
Die Bedeutung des Black-Scholes-Modells und die Verwendung der Black-Scholes-Formel zur Bewertung von Optionen in der Lebensversicherung ist Grund genug, die geschlossene Formel herzuleiten. Dazu wird der Ansatz über das Binomialmodell von Cox, Ross und Rubinstein gewählt.

1.2 Aufbau der Arbeit

Die Einleitung gab einen umfassenden Einblick zur Entwicklung und bisherigen Betrachtung dieses Themas. Im Folgenden wird der Aufbau dieser Arbeit dargestellt.
Um die Optionen in der Lebensversicherung bewerten zu können, wird auf die Optionspreistheorie zurück gegriffen. Dazu werden im zweiten Kapitel Optionen als Finanzinstrumente vorgestellt und ausführlich beschrieben. Um die Optionen zu bewerten, werden zwei Modelle erarbeitet. Der mathematische Schwerpunkt dieser Arbeit liegt bei der vollständigen Herleitung der Black-Scholes-Formel. Der Grundstein dafür wird vom Binomialmodell von Cox, Ross und Rubinstein gelegt. Auf Grund von vermehrten Annahmen und Randbedingungen, die für die Black-Scholes-Formel gelten müssen, wird das Ergebnis kritisch in Augenschein genommen.
Im dritten Kapitel wird verdeutlicht, wie Optionen definiert werden und warum diese ausschlaggebend in der Lebensversicherungsbranche sind. Außerdem wird dargelegt, wie bedeutsam die Bewertung von Optionen in der Lebensversicherung sein kann. Der Leser soll mit den Optionen, die einen finanziellen Charakter haben, bekannt gemacht werden, um mit der Bewertung, die auf den im ersten Kapitel dargelegten Modellen beruht, anzuschließen.
Die Optionen und Garantien mit biometrischen Charakter sind im vierten Kapitel zu finden. Nach einer Aufzählung der gängigsten Optionen, soll ein allgemeines Bewertungsprinzip dargelegt werden.
Das Kapitalwahlrecht spielt eine besondere Rolle, denn es wird sowohl unter dem finanziellen Aspekt, als auch unter dem biometrischen Risiko betrachtet. Daher wird im dritten und im vierten Kapitel die Bewertung des Kapitalwahlrechts durchgeführt.
Das fünfte Kapitel dient zur Diskussion über die Einflussfaktoren, die auf die Beweggründe eines Versicherungsnehmer wirken könnten, um eine seiner möglichen Optionen in Anspruch zu nehmen.
In der Zusammenfassung der gesamten Arbeit wird ein kritisches Auge auf die bisherige Bewertung geworfen.

Kapitel 2

Bewertung von Optionen als Finanzinstrument

2.1 Einführung in die Optionspreistheorie

Eine Option bezeichnet einen Kontrakt und wird an der Börse sowie außerhalb der Börse gehandelt. Es handelt sich dabei um ein vertraglich vereinbartes Recht, welches mit dem Kauf einer Option vom Optionskäufer erworben wird. Der Optionsverkäufer, auch Stillhalter genannt, erhält eine Optionsprämie vom Optionskäufer, der dann das Wahlrecht besitzt, zu einem späteren Zeitpunkt das Geschäft auszuführen. Daher handelt es sich bei Optionen um bedingte Termingeschäfte.
Es existieren zwei grundsätzliche Arten von Optionen. Die **Kaufoption** (Call) ermöglicht ihrem Besitzer, das vertraglich festgelegte Gut zukünftig zu einem bestimmten Preis zu kaufen. Die **Verkaufsoption** (Put) gibt ihrem Besitzer das Recht, das vertraglich festgelegte Gut künftig zu einem bestimmten Preis zu verkaufen.
Das zugrunde gelegte Gut wird auch als **Basiswert** bezeichnet. Dabei kann es sich um eine Aktie, ein Zinssatz oder eine Devise handeln. Im weiteren Verlauf sollen Aktienkurse dem Basiswert entsprechen. Der vereinbarte Preis für den Basiswert wird **Basispreis** genannt und ist ebenso vertraglich festgelegt.
Die Laufzeit einer Option und ihre Ausübungszeitpunkte sind ebenfalls vertraglich bestimmt. Es lassen sich die nachstehenden drei Typen von Optionen bezüglich des Ausübungszeitpunktes unterscheiden:

Europäische Optionen können nur am Ende der festgelegten Laufzeit ausgeübt werden.

Amerikanische Optionen können während der gesamten festgelegten Laufzeit ausgeübt werden.

Exotische Optionen können zu festgelegten Zeitpunkten während der Laufzeit ausgeübt werden.

Weiterhin zählt ein Optionsgeschäft vier Arten von Marktteilnehmern:

- Long-Call-Position: Käufer eines Calls
- Short-Call-Position: Verkäufer eines Calls
- Long-Put-Position: Käufer eines Puts
- Short-Put-Position: Verkäufer eines Put

Der **Payoff** benennt die Endfälligkeit einer Option. Er wird auch als Barbetrag bezeichnet, der vom Inhaber der Option am Ende der Laufzeit realisiert wird.

Es werden Bezeichnungen eingeführt, die für europäische Optionen gelten sollen:

S	–	aktueller Basiswert
K	–	Basispreis
t	–	Zeitpunkt im betrachteten Zeitintervall $[t_0, T]$
T	–	Fälligkeit der Option
$S(T)$	–	Basiswert bei Fälligkeit

Mittels dieser Bezeichnungen kann der Payoff eines europäischen Calls beziehungsweise Puts dargestellt werden:

$$c(T) = \max\{S(T) - K, 0\}$$
$$p(T) = \max\{K - S(T), 0\}$$

Der **Wert der Option** zum Ausübungszeitpunkt ergibt sich also aus der positiven Differenz des Basiswertes und dem Basispreis und wird als **innerer Wert** bezeichnet. In jedem Zeitpunkt vor der Ausübung ergibt sich der Wert der Option wie folgt:

$$\text{Wert der Option} = \text{Innerer Wert} + \text{Zeitwert}$$

Es können drei Zustände des inneren Wertes unterschieden werden:

- Innerer Wert > 0: Option ist **im Geld**
- Innerer Wert ≈ 0: Option ist **am Geld**
- Innerer Wert < 0: Option ist **aus dem Geld**

Diese Zustände lassen sich also wie in der Tabelle 2.1 beschreiben:

	Call	Put
im Geld	$S(t) > K$	$S(t) < K$
am Geld	$S(t) \approx K$	$S(t) \approx K$
aus dem Geld	$S(t) < K$	$S(t) > K$

Tabelle 2.1: *Zustände einer Option*

Bei der Betrachtung von europäischen Optionen ist der innere Wert eines Calls zum Basispreis K auf eine Aktie ohne Dividende zu definieren als:

$$\text{innerer Wert zum Zeitpunkt } t = \max\left\{S(t) - e^{-r(T-t)}K, 0\right\}$$

Entsprechend gilt für einen europäischen Put:

$$\text{innerer Wert zum Zeitpunkt } t = \max\left\{e^{-r(T-t)}K - S(t), 0\right\}$$

Dabei ist r ein stetiger risikoloser **Zinssatz**. Eine Erhöhung des Zinses hat eine positive Auswirkung auf Call-Optionen, während auf Put-Optionen ein negativer Einfluss besteht.
Ein weiterer wichtiger Begriff in der Optionspreistheorie ist die **Rendite**. Sie wird als Maß zur Beurteilung oder zum Vergleich von Aktien oder anderen Basiswerten verstanden. Außerdem bezeichnet die Rendite den relativen Wert des erzielten Gewinns. Die Rendite r_i einer Anlageform A_i im Zeitintervall $[t_0, T]$ ist definiert durch

$$r_i = \frac{A_i(T) - A_i(t_0)}{A_i(t_0)} = \frac{A_i(T)}{A_i(t_0)} - 1$$

Da die zukünftigen Werte der Anlageform beispielsweise einer Aktie nicht bekannt sind, wird der Erwartungswert der Rendite verwendet.
Die risikolose Anlageform A_f besitzt eine Rendite r_f. Dann wird r_f als risikoloser stetiger Zinssatz angenommen.

Der **Zeitwert** ist ein Bestandteil des Wertes der Option und wird von der Restlaufzeit beeinflusst. Je größer die Restlaufzeit ist, um so mehr kann sich der innere Wert der Option noch ändern. Liegt dieser nahe bei Null, so wird der Wert der Option nur noch durch den Zeitwert bestimmt.

Ein weiterer wichtiger Begriff bezüglich Optionen ist die **Volatilität** σ des Basiswertes. Sie bezeichnet allgemein die Schwankungsstärke des Basiswertes im Zeitverlauf und wird als Maß für das Risiko aufgefasst. Steigt die Volatilität, so steigt auch die Wahrscheinlichkeit, dass der Basispreis sowohl sehr große als auch sehr kleine Werte annehmen kann.

Der Optionspreis kann durch Einschränkungen abgeschätzt werden. Im Folgenden sollen die Wertobergrenze und die Wertuntergrenze für einen europäischen Call beziehungsweise Put gesetzt werden.
Die **Wertobergrenze für einen Call** stimmt mit dem Wert der zugrunde liegenden Aktie überein. Ein Call ist das Recht, die Aktie zu einem festgelegten Preis in Zukunft zu erwerben. Dieses Recht kann nicht teurer sein, als die Aktie selbst und damit ist die Wertobergrenze für den Preis eines Calls festgelegt.
Die **Wertobergrenze eines Puts** entspricht dem abgezinsten Basispreis. Der Gewinn eines Puts wird nur dann maximal, wenn der Aktienkurs bis auf Null fällt. Dann ist für die Wertobergrenze eines Puts nur noch der diskontierte Basispreis vorhanden.
Die **Wertuntergrenze eines Calls** entspricht zum Zeitpunkt T dem inneren Wert der Option. Da der Basispreis erst am Ende der Laufzeit zum Zeitpunkt T bezahlt wird, kann das Geld für den Basispreis zu einem risikolosen Zinssatz r bis zum Ausübungszeitpunkt angelegt werden. Daher ist die Wertuntergrenze für einen Call während der Laufzeit gleich der Differenz aus dem aktuellen Aktienkurs und dem diskontierten Basispreis.
Die **Wertuntergrenze eines Puts** entspricht der Differenz aus dem diskontierten Basispreis und dem aktuellen Aktienkurs. Dies ist aus den gleichen Überlegungen ersichtlich, wie bei der Wertuntergrenze eines Calls.
Mindestens jedoch liegt die Wertuntergrenze einer Option bei Null.

Die Bewertung von europäischen Optionen auf Wertpapiere wie zum Beispiel auf eine Aktien, die hier vorerst betrachtet wird, kann mittels verschiedener Methoden durchgeführt werden. Die zwei Bedeutendsten sollen im folgenden Abschnitt vorgestellt werden, wobei die erste Methode zur Hilfe genommen wird, um die zweite Bewertungsmethode herzuleiten.

2.2 Bewertungsmethoden für europäische Optionen

Das **Cox-Ross-Rubinstein-Modell** wird als erstes vorgestellt. Aus der Grenzwertbetrachtung dieses Modells geht die **Black-Scholes-Formel** hervor.

2.2.1 Das Cox-Ross-Rubinstein-Modell

Das Binomialmodell von John Carrington Cox, Stephen Alan Ross und Mark Edward Rubinstein wurde 1979 veröffentlicht und beruht auf die Verwendung von Binomialbäumen. Es zeigt einen leichteren Weg zur Black-Scholes-Formel, der hier dargestellt werden soll.
Die Ausführungen über Binomialmodelle werden eher gering gehalten. Daher wird auf die Vorstellung des Einperioden- und Mehrperiodenmodell der Binomialbäume verzichtet.

Um Optionen bewerten zu können, muss im ersten Schritt der Verlauf des Aktienkurses oder eines anderen zugrunde liegenden Basiswertes modelliert werden. Hierzu werden im Cox-Ross-Rubinstein-Modell Binomialbäume verwendet. Die Laufzeit der Option $[t_0, T]$ wird in n Teilintervalle $[t_k, t_{k+1}]$ eingeteilt, wobei jedes Teilintervall die gleiche Länge $\Delta t = \dfrac{(T - t_0)}{n}$ besitzt.

Annahmen für den Kursverlauf der Aktie:

u	–	Aufwärtsbewegung des Aktienkurses um (u - 1) %
d	–	Abwärtsbewegung des Aktienkurses um (1 - d)%
p	–	Wahrscheinlichkeit für eine Aufwärtsbewegung
$(1-p)$	–	Wahrscheinlichkeit für eine Abwärtsbewegung

mit $d < 1 < u$ und $0 < p < 1$ für alle $[t_k, t_{k+1}]$

Der Aktienkurs zum Zeitpunkt t_k hat den Wert $S(k)$. Er steigt mit der Wahrscheinlichkeit p auf den Wert $S(k)u$ und sinkt mit der Wahrscheinlichkeit $(1-p)$ auf den Wert $S(k)d$ innerhalb des Teilintervalls $[t_k, t_{k+1}]$. Dieses Verhalten wird in der Abbildung 2.1 dargestellt.

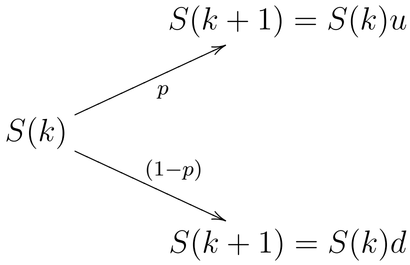

Abbildung 2.1: *Darstellung des k-ten Teilintervalls*

Der Binomialbaum zur Modellierung des Aktienkurses heißt wiedervereinigt, da die Bedingung $ud = du$ gilt. Eine Darstellung für einen solchen Baum zeigt die Abbildung 2.2. Es wird S anstatt $S(k)$ benutzt, da die jeweiligen Teilintervalle oberhalb zu erkennen sind.

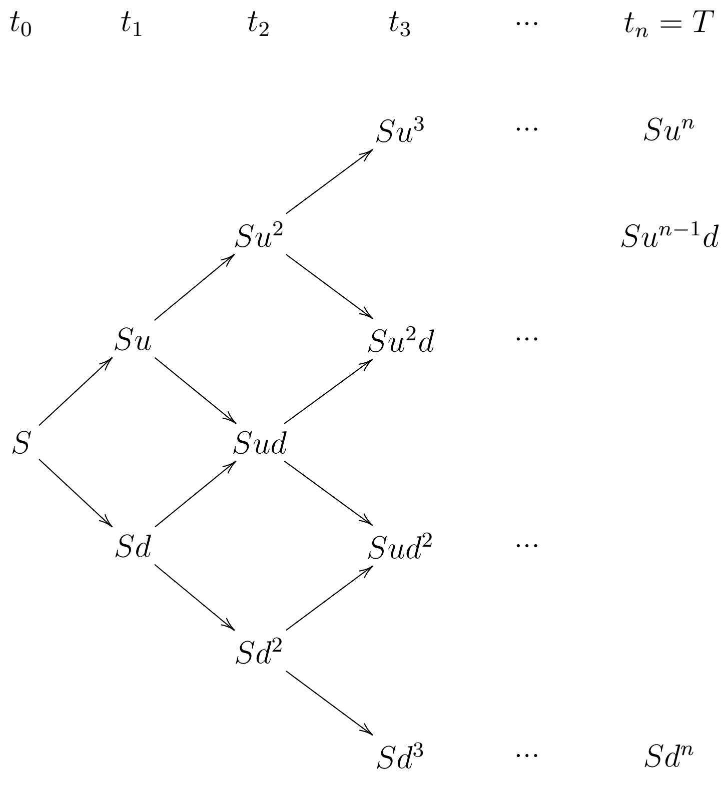

Abbildung 2.2: *Darstellung eines Binomialbaums mit n Teilintervallen*

Die Bestimmung des Aktienwertes ist zu jedem Zeitpunkt möglich, wenn die Anzahl der Aufwärts- und Abwärtsbewegungen, die beim Kursverlauf bis zu diesem Zeitpunkt aufgetreten sind, bekannt ist.

Um eine Bewertungsformel für europäische Optionen aufstellen zu können, muss ein äquivalentes Martingalmaß eingeführt werden.
Das **äquivalente Martingalmaß** ist ein Wahrscheinlichkeitsmaß, welches die wirklichen Wahrscheinlichkeiten im theoretischen Modell wieder gibt. Das bedeutet, die Wahrscheinlichkeiten p für eine Aufwärtsbewegung und $(1-p)$ für eine Abwärtsbewegung des Aktienkurses werden auf das Binomialmodell transformiert, um risikoneutrale Wahrscheinlichkeiten zu erhalten. Die Existenz eines äquivalenten Martingalmaßes zieht die Arbitragefreiheit nach sich, die in mathematischen Modellen der Finanzwelt eine wichtige Voraussetzung darstellt.

Arbitrage ist die Möglichkeit, risikolose Gewinne zu erzielen, in dem unterschiedliche Preise auf verschiedenen Märkten (zum Beispiel Börsen) ausgenutzt werden. In der Wirklichkeit ist diese Möglichkeit eher gering. Wenn sie tatsächlich auftritt, werden die Marktteilnehmer das sehr schnell ausnutzen, so dass die Arbitragemöglichkeit nicht lange aufrecht erhalten bleibt. Daher ist die **Arbitragefreiheit** an den Märkten keine besonders große Voraussetzung für die mathematischen Modelle.
Die Arbitragefreiheit wird hier vorausgesetzt und mit der Existenz eines äquivalenten Martingalmaßes begründet. Die Herleitung dessen ist im Anhang A zu finden, wo ein Ausflug in arbitragefreie Einperiodensysteme unternommen wird.

Die Wahrscheinlichkeit q für eine Aufwärtsbewegung im Cox-Ross-Rubinstein-Modell hat den Wert

$$q = \frac{1 + r_f - d}{u - d}$$

und die Wahrscheinlichkeit $(1-q)$ für eine Abwärtsbewegung des Aktienkurses im Modell besitzt den Wert

$$(1 - q) = \frac{u - (1 + r_f)}{u - d}$$

Dabei entspricht r_f der risikolosen Rendite der Anlageform A_f, also der stetigen risikolosen Verzinsung zum Zinssatz r_f.

Nach den risikolosen Wahrscheinlichkeiten unter dem äquivalenten Martingalmaß $\mathbf{Q}^*$ sind nun die absoluten Wahrscheinlichkeiten unter $\mathbf{Q}^*$ für den mutmaßlichen Aktienwert $S(T)$ zum Zeitpunkt T der Fälligkeit der Option gesucht. Das Zeitintervall $[t_0, T]$ ist, wie schon bekannt, in n Teilintervalle der gleichen Länge unterteilt. In einem Teilintervall kann der Aktienkurs entweder einer Aufwärts- oder Abwärtsbewegung folgen. Nach Ablauf der n Teilintervalle hat der Aktienkurs also j Aufwärtsbewegungen und $n-j$ Abwärtsbewegungen durchlaufen, womit die Aktie dem Wert Su^jd^{n-j} entspricht. Dann gilt für den Payoff eines europäischen Calls:

$$c(T) = \max\left\{Su^jd^{n-j} - K, 0\right\} = \left[Su^jd^{n-j} - K\right]^+$$

[1]

Da die Bedingung $ud = du$ gilt, muss die Reihenfolge der Kursbewegungen auch nicht beachtet werden. Daraus ist ersichtlich, dass die Binomialverteilung für den Verlauf des Aktienkurses unter dem äquivalenten Martingalmaß $\mathbf{Q}^*$ angenommen werden kann:

$$\mathbf{Q}^*\left(S(n) = Su^jd^{n-j}\right) = \mathbf{B_n}(j;p) = \left(\begin{array}{c} n \\ j \end{array}\right) q^j(1-q)^{n-j}$$

Um den Wert der Option zum Zeitpunkt t_0 zu ermitteln, wird mit $\dfrac{1}{(1+r_f)^n}$ diskontiert.
Dann ergibt sich für einen europäischen Call zum Zeitpunkt t_0 der Wert:

$$c\,(t_0) = \frac{1}{(1+r_f)^n} \sum_{j=0}^{n} \left(\begin{array}{c} n \\ j \end{array}\right) q^j(1-q)^{n-j} \left[Su^jd^{n-j} - K\right]^+$$

Da der Payoff des Calls nur positive Werte annimmt, kann die Summe vereinfacht werden. Dazu wird j_0 als kleinstes $j \in \mathbb{N}$ eingeführt, für das gilt:

$$Su^jd^{n-j} - K > 0$$

[1]Die Darstellung einer Funktion durch $[...]^+$ legt nahe, dass diese nur positive Werte annehmen kann und sonst null ist.

Daraus folgt:

$$c\left(t_0\right) = \frac{1}{\left(1+r_f\right)^n} \sum_{j=j_0}^{n} \binom{n}{j} q^j (1-q)^{n-j} \left(S u^j d^{n-j} - K\right)$$

Mit Auflösen der Klammer entsteht:

$$= S \sum_{j=j_0}^{n} \binom{n}{j} q^j (1-q)^{n-j} \frac{u^j d^{n-j}}{\left(1+r_f\right)^n} - \frac{K}{\left(1+r_f\right)^n} \sum_{j=j_0}^{n} \binom{n}{j} q^j (1-q)^{n-j}$$

Um die erste Summe in diesem Term zu vereinfachen, wird die Wahrscheinlichkeit q für eine Aufwärtsbewegung unter $\mathbf{Q}^*$ umgewandelt zu $q' = \dfrac{qu}{1+r_f}$. Dann ist die Wahrscheinlichkeit $1-q$ für eine Abwärtsbewegung unter $\mathbf{Q}^*$ des Kurses $(1-q') = (1-q)\dfrac{d}{1+r_f}$. q' und $(1-q')$ werden jeweils nach q und $1-q$ umgestellt:

$$q = \frac{q'\left(1+r_f\right)}{u} \quad \text{und} \quad 1-q = (1-q')\frac{(1+r_f)}{d}$$

Durch einsetzen in die Summe wird die nachstehende Vereinfachung erreicht.

$$\sum_{j=j_0}^{n} \binom{n}{j} q^j (1-q)^{n-j} \frac{u^j d^{n-j}}{\left(1+r_f\right)^n} = \sum_{j=j_0}^{n} \binom{n}{j} (q')^j (1-q')^{n-j}$$

Aus diesen Umformungen ergibt sich der Wert für einen europäischen Call im Cox-Ross-Rubinstein-Modell mit n Teilintervallen aus:

$$\boxed{c(t_0) = S\left(1 - \mathbf{B_n}(j_0 - 1; q')\right) - \frac{K}{\left(1+r_f\right)^n}\left(1 - \mathbf{B_n}(j_0 - 1; q)\right)}$$

Für einen europäischen Put lässt sich der Wert ebenso angeben:

$$\boxed{p(t_0) = \frac{K}{(1+r_f)^n}\left(\mathbf{B_n}(j_0-1;q)\right) - S\left(\mathbf{B_n}(j_0-1;q')\right)}$$

Der Beweis für die Bewertungsformel des Puts wird mittels der Put-Call-Parität vorgenommen.

Beweis

Die Put-Call-Parität hat folgende allgemeine Form:

$$c(t) + e^{-r(T-t)}K = p(t) + S(t)$$

Da es sich um den Zeitpunkt t_0 handelt, muss t durch t_0 ersetzt werden. Weiterhin gilt $S(t_0) = S$ und $e^{-r(T-t_0)} = \dfrac{1}{(1+r_f)^n}$. Das betrachtete Zeitintervall $[t_0, T]$ wird über die n Teilintervalle verdeutlicht. Daraus entsteht, nach $p(t_0)$ aufgelöst, die spezielle Form der Put-Call-Parität:

$$p(t_0) = c(t_0) - \left(S - \frac{K}{(1+r_f)^n}\right)$$

Durch das Einsetzen der Bewertungsformel für die Call-Option aus dem Cox-Ross-Rubinstein-Modell ergeben sich die nachstehenden Umformungen:

$$\begin{aligned}
p(t_0) &= S\left(1-\mathbf{B_n}(j_0-1;q')\right) - \frac{K}{(1+r_f)^n}\left(1-\mathbf{B_n}(j_0-1;q)\right) \\
&\quad - \left(S - \frac{K}{(1+r_f)^n}\right) \\
&= S - S\mathbf{B_n}(j_0-1;q') - \frac{K}{(1+r_f)^n} + \frac{K}{(1+r_f)^n}\mathbf{B_n}(j_0-1;q) \\
&\quad - S + \frac{K}{(1+r_f)^n} \\
&= \frac{K}{(1+r_f)^n}\mathbf{B_n}(j_0-1;q) - S\mathbf{B_n}(j_0-1;q')
\end{aligned}$$

■

2.2.2 Betrachtung zum Grenzverhalten des Cox-Ross-Rubinstein-Modells

Um vom Cox-Ross-Rubinstein-Modell zur Black-Scholes-Formel zu gelangen, wird die Anzahl der n Teilintervalle gegen Unendlich streben. Eine Grenzwertbetrachtung des Cox-Ross-Rubinstein Modells ist notwendig. Es wird der Spezialfall $d = \frac{1}{u}$ angenommen. Dann hat der Aktienkurs $S(k)$ nach k Teilintervallen den Wert $S(k) = Su^j d^{k-j} = Su^{2j-k}$ mit einem zufällig gewählten $j \in 0, ..., k$.
Für die folgenden Ausführungen wird der Logarithmus und die relative Wertentwicklung betrachtet und als lineare Funktion der binomialverteilten Zufallsvariable angesehen. Dabei ist J die Zufallsvariable, denn sie gibt die zufällige Anzahl der Aufwärtsbewegungen des Aktienkurses an.

$$\ln\left(\frac{S(k)}{S}\right) = (2J - k)\ln u$$

Die Binomialverteilung $\mathbf{B}(k,p)$ besitzt einen Erwartungswert von kp und eine Varianz von $kp(1-p)$. Auf die gegebene lineare Funktion der Zufallsvariablen angewendet, heißt das für den Erwartungswert

$$\mathbf{E}\left(\ln\left(\frac{S(k)}{S}\right)\right) = \mathbf{E}\left((2J-k)\ln u\right) = (2kp - k)\ln u = [(2p-1)\ln u]k$$

und die Varianz

$$\mathbf{V}\left(\ln\left(\frac{S(k)}{S}\right)\right) = \mathbf{V}\left((2J-k)\ln u\right) = [4p(1-p)\ln^2 u]k.$$

k zählt dabei die abgelaufenen Teilintervalle. Der betrachtete Zeitpunkt ist also $t_k = t_0 + k\Delta t = t_0 + \frac{k(T-t_0)}{n}$. Das heißt, dass k die Länge $\frac{k(T-t_0)}{n}$ des schon betrachteten Zeitintervalls angibt.
Der Erwartungswert und die Varianz hängen von k ab. Damit sind beide Werte proportional zur Länge des bereits betrachteten Zeitintervalls. Die Proportionalitätsfaktoren für den Erwartungswert und die Varianz von $\ln \frac{S(k)}{S}$ werden mit ν und σ^2 bezeichnet. Dabei ist $\sqrt{\sigma^2} = \sigma$ die Volatilität und gibt

an, wie stark der Aktienkurs zu Schwankungen tendiert. Die Volatilität des Aktienkurses wird zu jedem Zeitpunkt als konstant angenommen, also auch bei dem Übergang von der realen zur risikoneutralen Welt.

Wird das gesamte Zeitintervall $[t_0, T]$ betrachtet, so kann an Hand der Proportionalität die Vermutung aufgestellt werden, dass $\ln \frac{S(T)}{S}$ einen Erwartungswert von $\nu(T - t_0)$ und eine Varianz von $\sigma^2(T - t_0)$ besitzt.

An dieser Stelle sollen die Werte für p, u und d, die den Binomialbaum definieren, an die konstante Volatilität angepasst werden. Dazu ist die Rendite des Aktienkurses von Nöten. Da die Rendite an sich eine unbekannte Größe ist, wird auf den Erwartungswert der Rendite für das Zeitintervall Δt zurück gegriffen. Dieser wird für den weiteren Verlauf mit μ bezeichnet. Weiterhin ist die Volatilität σ der Rendite bekannt, die der Volatilität der Aktie entspricht. Nach dem Zeitintervall der Länge Δt hat der Aktienkurs einen Erwartungswert von $Se^{\mu\Delta t}$, wobei S der Aktienkurs zu Beginn der Periode ist. Das entspricht einer stetigen Verzinsung über die entsprechende Laufzeit mit dem Zinssatz μ. Der Erwartungswert des Aktienkurses abgeleitet aus dem Binomialbaum hat den Wert $pSu + (1 - p)Sd$. Durch Gleichsetzen entsteht

$$pSu + (1 - p)Sd = Se^{\mu\Delta t}$$

Wird diese Gleichung nach p umgestellt, hat die für den Aktienkurs angenommene Wahrscheinlichkeit p für eine Aufwärtsbewegung die folgende Form

$$p = \frac{e^{\mu\Delta t} - d}{u - d}$$

und die reale Wahrscheinlichkeit $(1 - p)$ für eine Abwärtsbewegung die Form

$$(1 - p) = \frac{u - e^{\mu\Delta t}}{u - d}.$$

Die Varianz der Rendite entspricht $\sigma^2\Delta t$. Mit Hilfe der Beziehung $\mathbf{V}(X) = \mathbf{E}(X^2) - [\mathbf{E}(X)]^2$ wird die Varianz wiederum aus dem Binomialbaum hergeleitet:

$$pu^2 + (1 - p)d^2 - [pu + (1 - p)d]^2$$

Wird die Varianz mit $\sigma^2\Delta t$ gleichgesetzt, entsteht

$$pu^2 + (1-p)d^2 - [pu + (1-p)d]^2 = \sigma^2\Delta t$$

Mittels Einsetzen der für den Aktienkurs angenommenen Wahrscheinlichkeit p erhält die Gleichung die Form

$$e^{\mu\Delta t}(u+d) - ud - e^{2\mu\Delta t} = \sigma^2\Delta t$$

Unter den nachstehenden Bedingungen kann eine näherungsweise Lösung für diese Gleichung gefunden werden.

1. Der Spezialfall $d = \frac{1}{u}$ wird angenommen.
2. Mittels Taylorreihenentwicklung gilt für $x << 1$ die Näherung $e^x \approx 1 + x$.

Die zweite Bedingung gibt wieder, dass mit $\Delta t << 1$ auch $\sigma^2\Delta t << 1$ und $\mu\Delta t << 1$ folgen. Damit gelten die Näherungen $e^{\sigma^2\Delta t} \approx 1 + \sigma^2\Delta t$ und $e^{\mu\Delta t} = 1 + \mu\Delta t$. Die quadratischen und höheren Potenzen von Δt können somit vernachlässigt werden.

Mit der ersten Bedingung folgt:

$$\begin{aligned} e^{\mu\Delta t}(u + \frac{1}{u}) - 1 - e^{2\mu\Delta t} &= \sigma^2\Delta t \\ \frac{u^2+1}{u} &= \frac{1+\sigma^2\Delta t}{e^{\mu\Delta t}} + e^{\mu\Delta t} \end{aligned}$$

Unter Benutzung der zweiten Bedingung entsteht die folgende quadratische Gleichung:

$$\begin{aligned} \frac{u^2+1}{u} &= e^{\sigma^2\Delta t - \mu\Delta t} + e^{\mu\Delta t} \\ 0 &= u^2 - \left(e^{\sigma^2\Delta t - \mu\Delta t} + e^{\mu\Delta t}\right) u + 1 \end{aligned}$$

Eine quadratische Gleichung der Form $0 = x^2 + px + q$ kann mittels der Lösungsformel $x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$ gelöst werden:

$$u_{1,2} = \frac{e^{\sigma^2\Delta t - \mu\Delta t} + e^{\mu\Delta t}}{2} \pm \sqrt{\frac{\left(e^{\sigma^2\Delta t - \mu\Delta t} + e^{\mu\Delta t}\right)^2}{4} - 1}$$

Der Ausdruck unter der Wurzel kann mittels der zweiten Bedingung umgeformt werden:

$$\begin{aligned}
\frac{\left(e^{\sigma^2\Delta t - \mu\Delta t} + e^{\mu\Delta t}\right)^2}{4} - 1 &= \frac{\left(1 + \sigma^2\Delta t - \mu\Delta t + 1 + \mu\Delta t\right)^2}{4} - 1 \\
&= \frac{\left(2 + \sigma^2\Delta t\right)^2}{4} - 1 \\
&= \frac{(4 + 4\sigma^2\Delta t + \sigma^4(\Delta t)^2) - 4}{4} \\
&= \frac{4\left(\sigma^2\Delta t + \frac{1}{4}\sigma^4(\Delta t)^2\right)}{4} \\
&= \boldsymbol{\sigma^2\Delta t}
\end{aligned}$$

Dabei wurde der quadratische Term $\frac{1}{4}\sigma^4(\Delta t)^2$ auch hier als vernachlässigbar betrachtet. In die Lösungsformel eingesetzt und ein weiteres Mal unter Berücksichtigung der zweiten Bedingung entsteht:

$$\begin{aligned}
u_{1,2} &= \frac{e^{\sigma^2\Delta t - \mu\Delta t} + e^{\mu\Delta t}}{2} \pm \sqrt{\sigma^2\Delta t} \\
&= \frac{1 + \sigma^2\Delta t - \mu\Delta t + 1 + \mu\Delta t}{2} \pm \sqrt{\sigma^2\Delta t} \\
&= \frac{2\left(1 + \frac{1}{2}\sigma^2\Delta t\right)}{2} \pm \sigma\sqrt{\Delta t} \\
&= e^{\frac{1}{2}\sigma^2\Delta t} \pm \sigma\sqrt{\Delta t}
\end{aligned}$$

Auf Grund dessen, dass $\Delta t << 1$ gilt und die Multiplikation mit $\frac{1}{2}$ den Exponenten der Exponentialfunktion gegen null streben lässt, kann daraus gefolgert werden, dass $e^{\frac{1}{2}\sigma^2\Delta t} \approx 1$. Dann hat die obige Gleichung die

Näherungslösungen:

$$u_1 \approx 1 + \sigma\sqrt{\Delta t} \approx e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}$$

$$u_2 \approx 1 - \sigma\sqrt{\Delta t} \approx e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}$$

Nun kann $u_1 = u$ und $u_2 = d$ gesetzt werden, womit die erste Bedingung $d = \frac{1}{u}$ erfüllt ist. Dann entspricht eine näherungsweise Lösung der obigen Gleichung

$$u \approx e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}$$

$$d \approx e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}$$

mit $\Delta t = \frac{(T - t_0)}{n}$.

Um nun eine Grenzwertbetrachtung durchführen zu können, wird eine Folge von Cox-Ross-Rubinstein-Modellen erzeugt. Die wachsende Anzahl der Teilintervalle führt dabei zu einem größeren Netz des Binomialbaums. Denn durch eine vervielfältigte Einteilung der Teilintervalle entstehen neue Knoten und der Aktienkurs wird genauer konstruiert.

Für die Folge der Binomialmodelle sollen die Proportionalitätsfaktoren in jedem Teilintervall gültig sein. Damit wird erreicht, dass die Entwicklung des Kursverlaufs bereits fest steht und $\ln\frac{S(t)}{S}$ zu jedem beliebigen $t \in [t_0, T]$ normalverteilt ist. Der kleinste und größte Aktienwert im n-ten Modell kann nun wie in Abbildung 2.3 angegeben werden:

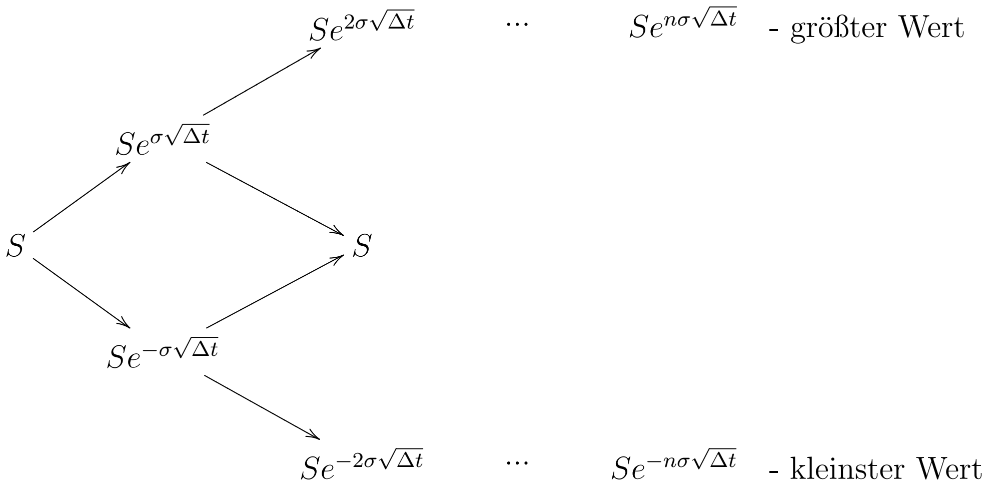

Abbildung 2.3: *Darstellung für größten und kleinsten Wert im Binomialbaum*

An Hand des größten beziehungsweise kleinsten Aktienwertes kann der Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} Su^n = \infty \ ,$$

abgeleitet werden, wenn in den n Teilintervallen nur Aufwärtsbewegungen erfolgt sind. Bei der Aneinanderreihung von n Abwärtsbewegungen folgt der Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} Sd^n = \lim_{n\to\infty} S\frac{1}{u^n} = 0 \ ,$$

Durch die wachsende Anzahl n der Teilintervalle nimmt die Knotenmenge des Binomialbaumes zu. Daraus folgt:

$$\lim_{n\to\infty} u = \lim_{n\to\infty} e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} = \lim_{n\to\infty} e^{\sigma\sqrt{\frac{(T-t_0)}{n}}} = 1$$

Zusammenfassend kann gesagt werden, dass mit $n \to \infty$ die Menge aller möglichen Knoten im Binomialbaum abdeckt, also zu jedem Zeitpunkt Handel möglich und der Aktienkurs stets positiv ist.

Um die Grenzwertbetrachtung des Cox-Ross-Rubinstein-Modells fortführen zu können, muss auf eine Hilfe zurück gegriffen werden, die im Anhang B zu finden ist und an der Stelle auch bewiesen wird. Hier wird lediglich das Resultat verwendet.

Es gelten nachstehende ***Eigenschaften*** im dargestellten Modell:

Eigenschaften für Erwartungswert und Varianz

Je größer die Anzahl der Teilintervalle im Zeitintervall $[t_0, T]$ werden, um so kleiner wird die Länge Δt eines jeden Teilintervalls. Das heißt, es gilt $\lim\limits_{n\to\infty} = \lim\limits_{\Delta t\to 0}$. Wird nun der Erwartungswert mit wachsenden n betrachtet, so folgt

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \mathbf{E}\left(\ln\left(\frac{S(T)}{S}\right)\right) &= \lim_{\Delta t\to 0} \mathbf{E}\left(\ln\left(\frac{S(T)}{S}\right)\right)\\ &= \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T - t_0)\end{aligned}$$

Für die Varianz gilt dann

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \mathbf{V}\left(\ln\left(\frac{S(T)}{S}\right)\right) &= \lim_{\Delta t\to 0} \mathbf{V}\left(\ln\left(\frac{S(T)}{S}\right)\right)\\ &= \sigma^2\,(T - t_0)\end{aligned}$$

Daraus lässt sich als erstes folgern, dass die obige Vermutung bewahrheitet ist, wenn für $\nu = \mu - \frac{\sigma^2}{2}$ gilt. Somit erfüllt die erwartete Rendite die Gleichung $\mu = \nu + \frac{\sigma^2}{2}$.

Eine weitere Folgerung aus diesen Eigenschaften ist die Konvergenz von Erwartungswert und Varianz. Die Konvergenzaussage kann auf $\ln\left(\frac{S(T)}{S}\right)$ übertragen werden.

Bekannt ist der **Grenzwertsatz von de Moivre - Laplace**, wonach die Binomialverteilung $\mathbf{B}(n, p)$ mit $n \to \infty$ gegen die Normalverteilung strebt. Da das Grenzwertverhalten einer Folge von Binomialmodellen in einem linearen Zusammenhang beobachtet wird und keine einzelne Zufallsvariable, muss der Grenzwertsatz von de Moivre - Laplace verallgemeinert werden:

Verallgemeinerung des Grenzwertsatzes von de Moivre - Laplace

Es seien v, w reelle Zahlen mit $w > 0$, $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei eine Folge von Zufallsvariablen mit

$$X_n = a_n Y_n + b_n \ ,$$

wobei Y_n $\mathbf{B}(n, p_n)$-verteilt ist und a_n, b_n reelle Zahlen sind. Gilt dann

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{E}(X_n) = v \quad \text{und} \quad \lim_{n\to\infty} \mathbf{V}(X_n) = w^2 \ ,$$

so konvergiert $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in Verteilung gegen die Normalverteilung mit $\mathbf{N}(v, w^2)$, das heißt, es gilt für alle $z \in \mathbb{R}$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{F_n}(z) = \mathbf{\Phi}\left(\frac{z-v}{w}\right)$$

Hierbei ist $\mathbf{F_n}$ die Verteilungsfunktion von X_n und $\mathbf{\Phi}$ die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung, also

$$\mathbf{\Phi}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

In der hier dargestellten Folge von Binomialmodellen sind dazu die Wert

$$a_n = 2\ln u \text{ und } b_n = -n\ln u$$

sowie

$$v = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T - t_0) \quad \text{und} \quad w^2 = \sigma^2\,(T - t_0)$$

gegeben. Es gilt demnach die Aussage, dass die betrachtete Folge von Cox-Ross-Rubinstein-Modellen im Grenzwert zu lognormalverteilten Aktienkursen führt:

$$\ln\left(\frac{S(T)}{S}\right) \sim \mathbf{N}\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T - t_0)\,, \sigma^2\,(T - t_0)\right)$$

Denn eine Zufallsvariable X ist lognormalverteilt, wenn $\ln X$ normalverteilt ist.

2.2.3 Herleitung der Black-Scholes-Formel

Da durch die Grenzwertbetrachtung bekannt ist, dass $\ln\left(\frac{S(T)}{S}\right)$ sich der Normalverteilung annähert, soll nun von der Cox-Ross-Rubinstein-Formel auf die Black-Scholes-Formel geschlossen werden. Dies wird für eine Verkaufsoption durchgeführt und kann gegebenenfalls über die Put-Call-Parität auch für eine Kaufoption bewiesen werden.
Zur Erinnerung wird die Bewertungsformel für eine Call-Option im Binomialmodell an dieser Stelle ein weiteres Mal angebracht:

$$c(t_0) = S\left(1 - \mathbf{B_n}(j_0 - 1; q')\right) - \frac{K}{(1+r_f)^n}\left(1 - \mathbf{B_n}(j_0 - 1; q)\right)$$

Um zu der Bewertungsformel von Black und Scholes zu gelangen, muss im ersten Schritt das äquivalente Martingalmaß gefunden werden.

Eine Voraussetzung der Black-Scholes-Formel ist die Existenz eines stetigen risikolosen Zinssatz r. Zu diesem Zinssatz soll zu jedem Zeitpunkt innerhalb des Zeitintervalls $[t_0, T]$ risikolos Geld geliehen und verliehen werden können. Das heißt, es gilt:

$$1 + r_f = e^{r\Delta t}$$

In der Grenzwertbetrachtung zum Binomialmodell wurde $n \to \infty$ untersucht. Für eine Verzinsung über n Teilperioden bedeutet dies:

$$\frac{1}{(1+r_f)^n} = e^{-r(T-t_0)}$$

Weiterhin sind die nachstehenden Werte aus der Darstellung des Cox-Ross-Rubinstein-Modells bekannt:

$u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}$	–	für eine Aufwärtsbewegung
$d = \frac{1}{u}$	–	für eine Abwärtsbewegung
p	–	angenommene Wahrscheinlichkeit für eine Aufwärtsbewegung

Im Binomialmodell wird die Wahrscheinlichkeit für eine Aufwärtsbewegung unter dem äquivalenten Martingalmaß $\mathbf{Q}^*$ mit

$$q = \frac{1 + r_f - d}{u - d}$$

angegeben. Mit dem Vorausgesetzten hat die risikoneutrale Wahrscheinlichkeit für eine Aufwärtsbewegung im Black-Scholes-Modell die Gestalt:

$$q = \frac{e^{r\Delta t} - d}{u - d}$$

Für $\mu = r$ entspricht die risikoneutrale Wahrscheinlichkeit q der für den Aktienkurs angenommenen Wahrscheinlichkeit p für eine Aufwärtsbewegung des Aktienkurses.

Im nächsten Schritt muss gezeigt werden, wie die Binomialverteilung sich im Grenzwertverhalten an die Normalverteilung annähert:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left(1 - \mathbf{B_n}\left(j_0 - 1; q\right)\right) &= \lim_{n\to\infty}\left(1 - \mathbf{\Phi}\left(\frac{j_0 - 1 - nq}{\sqrt{nq(1-q)}}\right)\right)\\ &= \lim_{n\to\infty}\mathbf{\Phi}\left(\frac{nq + 1 - j_0}{\sqrt{nq(1-q)}}\right)\end{aligned}$$

Dabei ist $\mathbf{\Phi}$ die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung, wie in der Verallgemeinerung des Grenzwertsatzes von de Moivre - Laplace aufgezeigt. Das heißt, es wird eine Standardisierung vorgenommen.
Um in dem letzten Ausdruck j_0 zu ersetzen, wird das Gleichnis $Su^{j_0}d^{n-j_0} = K$ herangezogen und mit $u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}$ und $u = \frac{1}{d}$ modifiziert.

$$e^{\sigma\sqrt{\Delta t}j_0} e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}(n-j_0)} = \frac{K}{S}$$

Mit der Operation ln und dem Umstellen nach j_0 ergibt sich der Ausdruck

$$j_0 = \frac{\ln\left(\frac{K}{S}\right) + n\sigma\sqrt{\Delta t}}{2\sigma\sqrt{\Delta t}}$$

Dieser wird in der standardisierten Form ersetzt. Dabei kann der Summand 1 vernachlässigt werden, da er keinen weiteren Einfluss auf den Grenzwert besitzt, wenn der Nenner des Terms gegen ∞ strebt.

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{\Phi}\left(\frac{nq - \frac{\ln\left(\frac{K}{S}\right)+n\sigma\sqrt{\Delta t}}{2\sigma\sqrt{\Delta t}}}{\sqrt{nq(1-q)}}\right)$$

Mit $n = \dfrac{T-t_0}{\Delta t}$ lässt sich das Argument der Standardnormalverteilung $\mathbf{\Phi}$ wie folgt umformen:

$$\frac{nq - \frac{\ln\left(\frac{K}{S}\right)}{2\sigma\sqrt{\Delta t}} - \frac{n}{2}}{\sqrt{nq(1-q)}} = \frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right)}{2\sigma\sqrt{T-t_0}\sqrt{q(1-q)}} + \frac{nq - \frac{n}{2}}{\sqrt{nq(1-q)}}$$

Diese zwei entstandenen Summanden werden nun im Grenzwert mit $n \to \infty$ gesondert betrachtet.

Der erste Summand wird mittels des Hilfssatzes aus dem Anhang B und mit $\mu = r$ modifiziert. Dabei gilt $q = f^*(\sqrt{\Delta t})$ und an der Stelle 0 hat die Funktion f^* den Grenzwert $\dfrac{1}{2}$. Daraus folgt:

$$q(1-q) = f^*(\sqrt{\Delta t})\left(1 - f^*(\sqrt{\Delta t})\right)$$

woraus sich ergibt

$$\lim_{\Delta t\to 0} q(1-q) = \lim_{\Delta t\to 0} f^*(\sqrt{\Delta t})\left(1 - f^*(\sqrt{\Delta t})\right) = \frac{1}{4}$$

wie im Anhang B ersichtlich ist.

Damit wird der erste Summand umgeformt.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right)}{2\sigma\sqrt{T-t_0}\sqrt{q(1-q)}} = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right)}{2\sigma\sqrt{T-t_0}\sqrt{q(1-q)}}$$

$$= \frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right)}{\sigma\sqrt{T-t_0}}$$

Der zweite Summand wird ebenso behandelt, wie im Einzelnen nachvollzogen werden kann.
Zuvor wird der Term mit $n = \dfrac{T-t_0}{\Delta t}$ und $q = f^*\left(\sqrt{\Delta t}\right)$ sowie $q(1-q) = f^*(\sqrt{\Delta t})\left(1 - f^*(\sqrt{\Delta t})\right)$ vereinfacht.

$$\frac{nq - \frac{n}{2}}{\sqrt{nq(1-q)}} = \frac{n\left(q - \frac{1}{2}\right)}{\sqrt{nq(1-q)}}$$

$$= \frac{\frac{T-t_0}{\Delta t}\left(f^*(\sqrt{\Delta t}) - \frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\frac{T-t_0}{\Delta t}}\sqrt{f^*(\sqrt{\Delta t})\left(1 - f^*(\sqrt{\Delta t})\right)}}$$

$$= 2\sqrt{\frac{T-t_0}{\Delta t}}\left(f^*(\sqrt{\Delta t}) - \frac{1}{2}\right)$$

Daraus ergibt sich für diesen Summanden unter Benutzung des Hilfssatzes aus dem Anhang B der Grenzwert:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{nq - \frac{n}{2}}{\sqrt{nq(1-q)}} = 2 \lim_{\Delta t \to 0} \sqrt{\frac{T-t_0}{\Delta t}} \left(f^*(\sqrt{\Delta t}) - \frac{1}{2} \right)$$

$$= 2 \lim_{\Delta t \to 0} \sqrt{\frac{T-t_0}{\Delta t}} \left(\frac{1}{2} + \left(\frac{r}{2\sigma} - \frac{\sigma}{4} \right) \sqrt{\Delta t} + o(\Delta t) - \frac{1}{2} \right)$$

$$= 2 \left(\frac{r}{2\sigma} - \frac{\sigma}{4} \right) \sqrt{T - t_0}$$

$$= \frac{r - \frac{\sigma^2}{2}}{\sigma} \sqrt{T - t_0}$$

Werden die Summanden nun wieder zusammen gesetzt, so entsteht

$$d_- = \frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right)}{\sigma\sqrt{T-t_0}} + \frac{\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t_0)}{\sigma\sqrt{T-t_0}}$$

$$= \frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t_0)}{\sigma\sqrt{T-t_0}}$$

Für $(1 - \mathbf{B_n}(j_0 - 1; q'))$ ist das Verfahren ebenso anzuwenden, um

$$d_+ = \frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t_0)}{\sigma\sqrt{T-t_0}}$$

zu erhalten. Kurz gefasst, heißt das

$$(1 - \mathbf{B_n}(j_0 - 1; q)) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathbf{\Phi}(d_-)$$

und

$$(1 - \mathbf{B_n}(j_0 - 1; q')) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathbf{\Phi}(d_+)$$

Das Resultat dieser Herleitung ist die Black-Scholes-Formel.

Satz (Black-Scholes-Formel)

Wird zu vorgegebenen $\sigma > 0$ im n-stufigen Cox-Ross-Rubinstein-Modell $u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}$, $d = \dfrac{1}{u}$ mit $\Delta t = \dfrac{T - t_0}{n}$ gesetzt, so ergeben sich im Grenzübergang $n \to \infty$ für einen europäischen Call c oder Put p zum Basispreis K auf eine Aktie ohne Dividende mit aktuellem Kurs S und Fälligkeitstermin T der Option die Preise

$$\boxed{c(t_0) = S\boldsymbol{\Phi}(d_+) - e^{-r(T-t_0)}K\boldsymbol{\Phi}(d_-)}$$

$$\boxed{p(t_0) = e^{-r(T-t_0)}K\boldsymbol{\Phi}(-d_-) - S\boldsymbol{\Phi}(-d_+)}$$

mit

$$d_+ = \frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T - t_0)}{\sigma\sqrt{T - t_0}}$$

$$d_- = \frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T - t_0)}{\sigma\sqrt{T - t_0}}$$

$\boldsymbol{\Phi}$ ist die Verteilungsfunktion der normierten Normalverteilung, also

$$\boldsymbol{\Phi}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

Die Herleitung des Satzes wird als Beweis angesehen.

Der Nachweis der Black-Scholes-Formel über das Cox-Ross-Rubinstein-Modell enthält eine Vielzahl von Näherungen. Dies ist aus einer Sicht sicherlich kritisch zu beurteilen. Bei genauerer Betrachtung jedoch, kann jede gemachte Näherung auf die Grenzwertbetrachtung zurück geführt werden. Während Untersuchung des Grenzwertverhaltens des Cox-Ross-Rubinstein-Modells wurde auf eine Verallgemeinerung des Grenzwertsatzes von de Moivre und Laplace zurück gegriffen. Auch das kann als Einschränkung gesehen werden, ist aber notwendig um die Grenzwertuntersuchung abzuschließen und die Black-Scholes-Formel auf diesem Weg herleiten zu können.
Die Black-Scholes-Formel ist in der Praxis sehr gebräuchlich und lässt kaum Kritik offen. Beispielsweise ist die Forderung nach einer risikoneutralen Bewertung in der Praxis nicht gegeben. Im Binomialmodell von Cox, Ross und Rubinstein kann zu jedem Zeitpunkt einer Periode von einer risikoneutralen Bewertung ausgegangen werden. Im Black-Scholes-Modell sind immer nur sehr kurze Zeitabschnitte risikolos, wie aus der Grenzwertbetrachtung folgt. Um die Neutralität des Risikos zu erhalten, müssen regelmäßige Anpassungen vorgenommen werden. Trotz dessen entspricht die Rendite der Höhe des risikolosen Zinssatzes r. Dies resultiert daraus, dass in die Black-Scholes-Formel keine Variable eingeht, welche abhängig von der Risikobereitschaft des beteiligten Marktteilnehmers ist. Die einzige Größe, die Abhängigkeit von der Risikobereitschaft zeigt, wird als erwartete Rendite μ der Aktie identifiziert. μ wächst für eine beliebige Aktie genau dann, wenn die Risikoaversion des Marktteilnehmers steigt. Daraus folgt, dass alle Marktteilnehmer risikoneutral sind. Diese fordern dann auch keine Prämien für eine Risikoübernahme und demnach gilt $\mu = r$. Also kann die risikoneutrale Bewertung von Derivaten unabhängig von der erwarteten Rendite mittels der Black-Scholes-Formel vorgenommen werden. Dies erleichtert die Analyse von Derivaten erheblich.

Ein weiterer möglicher Kritikpunkt an der Black-Scholes-Formel ist die angenommene konstante Volatilität σ. Alle Variablen, die in die Black-Scholes-Formel eingehen, sind leicht zu ermitteln oder einfach festlegbar. Die Volatilität hingegen birgt eine große Unsicherheit in dem Modell. Dabei beeinflusst die Volatilität σ den Optionspreis wie folgt:

- Wächst die Volatilität, um so größer wird der Optionspreis.

- Sinkt die Volatilität, fällt auch der Preis der Option.

In der Praxis wird oft aus den vergangenen Schwankungen der Aktie eine Volatilität bestimmt, die sogenannte historische Volatilität. Diese kann mittels geeigneter Schätzer ermittelt werden. Benötigt wird allerdings die zukünftige Volatilität, welche bis zur Fälligkeit der Option gültig ist.
Sind alle Größen bekannt, kann durch Umstellen der Black-Scholes-Formel die implizite Volatilität errechnet werden. So kann ein Marktteilnehmer erfahren, welcher Wert für die Volatilität in der Optionspreisberechnung verwendet wurde. Dies kann entscheidend auf den Optionshandel einwirken. Daher wird der impliziten Volatilität eine große Beachtung geschenkt.
Es existieren Modelle in denen die Volatilität als stochastisch angenommen wird. Auch diese sind in der Praxis verbreitet, aber auch mit einem Mehraufwand verbunden, so dass sich die implizite Volatilität derzeit durchgesetzt hat.

2.3 Zinsstrukturmodell von Hull und White

Das Hull und White Modell ist ein stochastisches Zinsstrukturmodell. Es wird an dieser Stelle eingeführt, da theoretische Modelle aus der Finanzwelt in Lebensversicherungen zur Bewertung der Optionen angewendet werden sollen. Die Optionen haben keine Verbindung zu Aktien. Es spielen vielmehr Zinssätze eine Rolle, so dass der Basiswert keine Aktie darstellt, sondern stochastisch angenommene Zinsen. Somit ist es erforderlich, ein Modell vorzustellen, welches die Zinssätze modelliert und die Anwendung der Black-Scholes-Formel zur Bewertung der Optionen möglich macht.
Das Modell von John Hull und Alan White wurde 1990 veröffentlicht und gilt als Erweiterung des Vasicek-Modells. Sie bemühten sich dabei um eine exaktere Anpassung der anfänglichen Zinsstruktur. Bevor jedoch das Modell eingeführt wird, sollen noch einige Begriffe erläutert werden. Dazu der folgende Abschnitte, an dem sich das Hull und White Modell anschließt.

2.3.1 Zinsderivate

Um ein Zinsstrukturmodell vorstellen zu können, muss zuvor erläutert werden, was eine Zinsstruktur ist und welche weiteren Begriffe benötigt werden. **Zinsderivate** sind Finanzprodukte mit Auszahlungen, die vom zukünftigen Zinssatz abhängen. Bisher wurde in den vorgestellten Modellen die Annahme getroffen, dass es einen risikolosen Zinssatz r gibt, der zu allen Zeiträumen gültig und konstant ist. Wird beispielsweise zu einem Zeitpunkt t_0 ein Euro angelegt, so wächst dieser bis zum Zeitpunkt t auf den Wert $B(t_0, t) = e^{r(t-t_0)}$. Dann ist der Zinssatz r als risikolos und stetig anzusehen. Diese risikolose Anlageform wird auch als **Cashbond** bezeichnet. Wird ein Cashbond innerhalb des Zeitraums $[t_0, t]$ zu allen k Teilintervallen angelegt und ist die **risikolose Rendite** r_f konstant, so gilt für den Wert des Cashbonds zum Zeitpunkt t, also nach k Perioden

$$B(t_0, t) = (1 + r_f)^k \ .$$

Die Handhabung im Modell mit solchen Zinssätzen ist stark vereinfachend. Die Praxis sieht dagegen die Existenz einer **Spot Rate** $R(0, t)$ vor, was so viel heißt, dass zu jedem Zeitpunkt ein eigener Zinssatz für eine beliebige Laufzeit t existiert. Die Gesamtheit dieser Zinssätze in Abhängigkeit mit ihren Laufzeiten bildet die sogenannte **Zinstrukturkurve**. Ein Finanzprodukt

kann somit von den zukünftigen Zinsen, also von der zukünftigen Entwicklung der Zinsstrukturkurve abhängig sein.
Ein **Zerobond** ist ein Zinsderivat, welches keine Auszahlungen während der gesamten Laufzeit vorsieht. Viel mehr werden die alle Zinsen erst mit der Rückzahlung am Ende der Laufzeit fällig. Ein Zerobond wird auch als **Nullkupon-Anleihe** bezeichnet, denn ein üblicher Ausdruck für Auszahlung ist auch Kupon. Dieses Derivat ist eine Art der stetigen Verzinsung, wobei die Spot Rate zu Beginn festgelegt wird. Dem zur Folge berechnet sich der Wert eines Zerobonds für einen Euro mit einer Fälligkeit zum Zeitpunkt T aus

$$P(0,T) = e^{-R(0,T)T}$$

Das heißt, wird zum Zeitpunkt 0 ein Euro für T Perioden zu einer Spot Rate von $R(0,T)$ angelegt, so ist $P(0,T)$ der Wert des Euros zur Fälligkeit. Dies entspricht dem Diskontierungsfaktor für einen Zeitraum von $[0,T]$.
Durch Umstellen lässt sich die Spot Rate ermitteln:

$$R(0,T) = \frac{-\ln P(0,T)}{T}$$

Ein Zinssatz für eine geringe Laufzeit wird auch **Short Rate** oder „kurzfristiger Zinssatz“ genannt. Sie wird zur Zeit t mit $r(t)$ bezeichnet. Die Short Rate ist ein theoretisches Konstrukt und daher in der Praxis nicht direkt beobachtbar. Sie wird genutzt, um die zukünftige Entwicklung der Zinsstruktur zu beschreiben. Dazu gibt es eine Vielzahl von Zinsstrukturmodellen oder auch Short-Rate-Modellen. Das Hull und White Modell, welches auch vorgestellt werden soll, gehört auch zu dieser Art von Modellen.
Die **Forward Rate** ist ein Zinssatz für einen zukünftigen Zeitraum, wobei sie aus der heutigen Spot Rate abgeleitet wird. Die Forward Rate kann auch als Maß für die zukünftigen Veränderungen der Zinsstrukturkurve angesehen werden. Sie wird mit $F(t_0,t)$ bezeichnet und ermittelt sich aus den bekannten Spot Rates.

$$F(t_0,t) = \frac{R(0,t)t - R(0,t_0)t_0}{t - t_0}$$

Dabei symbolisiert der Zeitpunkt 0 das Heute. t_0 ist ein Zeitpunkt in der Zukunft, wo zu $F(t_0,t)$ bis zur Fälligkeit t Geld angelegt werden soll. Um die

Forward Rate zu berechnen, werden die Spot Rates vom heutigen Zeitpunkt bis t_0 beziehungsweise t benötigt.

2.3.2 Grundlagen für ein Zinsstrukturmodell

Das Ziel eines Zinsstrukturmodells ist die Ermittlung der zukünftigen Entwicklung der Zinssätze, also der Zinsstrukturkurve. Wie schon erwähnt, wird bei der Modellierung der Zinsen die Short Rate verwendet. Sie folgt einem stochastischen Prozess, der sich mittels einer stochastischen Differentialgleichung modelliert.
Das Verfahren ist ähnlich, wie bei Aktienkursen. Allerdings muss ein entscheidender Unterschied beachtet werden. Zinsen streben, im Gegensatz zu Aktienkursen, im Laufe der Zeit gegen ein langfristiges Durchschnittsniveau. Diese Eigenschaft des Zinssatzes wird auch **Mean Reversion** genannt. Das bedeutet, dass die Mean Reversion bei einem kurzfristig hohem Zinssatz eine negative Driftrate bewirkt, da dann eher ein Abwärtstrend zu vermuten ist. Da bei einem kurzfristig niedrigem Zinssatz mit einem Aufwärtstrend zu rechnen ist, führt die Mean Reversion in diesem Fall zu einer positiven Driftrate. Zur Begründung der Existenz der Mean Reversion in der Praxis kann wie folgt argumentiert werden. Ist der Zinssatz sehr hoch, wird die Nachfrage nach Krediten zurück gehen, was eine Hemmung der Wirtschaft zur Folge hat. Entsprechend werden dann die Zinssätze fallen. Nehmen sie einen zu niedrigen Wert an, so nimmt die Nachfrage seitens des Kreditnehmers nach Zahlungsmitteln stark zu und die Zinssätze werden wieder steigen.
Bei der Wahl des Zinsstrukturmodells wurde darauf geachtet, dass die Mean Reversion in dem Modell berücksichtigt wird.

Ein zusätzliches Kriterium ist die Voraussetzung der Arbitragefreiheit. Dazu werden die **No-Arbitrage-Modelle** unter den Zinsstrukturmodellen verwendet. Diese benutzen die aktuelle Zinsstruktur, um die zukünftige Entwicklung genauer beschreiben zu können. Die Driftrate wird dabei zu einer zeitabhängigen Variablen innerhalb des Modells.

Einfaktor- und **Zweifaktor-Modelle** sind eine weitere Unterteilung von Zinsstrukturmodellen. Bei Einfaktor-Modellen wird der Prozess der Short Rate nur von einer Unsicherheitsquelle beeinflusst. In Zweifaktor-Modellen lässt sich eine weitere Größe finden, die wiederum als stochastischer Prozess angenommen wird, wie beispielsweise die Struktur der Volatilität. Das Einfaktor-Modell ist deshalb nicht schlechter. Es zieht nach sich, dass alle Zinssätze die selbe Richtung annehmen in einer beliebig kleinen Zeitperiode. Dabei ist wichtig, dass sich die Zinssätze nicht um den gleichen Betrag verändern. Also kann sich im Laufe der Zeit die Gestalt der Zinsstrukturkurve wandeln.

2.3.3 Das Hull und White Modell

Das Hull und White Modell ist ein Einfaktor-No-Arbitrage-Modell. Die Argumente für die getroffene Wahl lassen sich aus dem letzten Abschnitt schnell heraus filtern. Mit einem Einfaktor-Modell ist es möglich mit nur einem stochastischen Prozess für die Short Rate eine gute Zinsstrukturkurve zu erhalten. Der positive Aspekt eines No-Arbitrage-Modells ist es, dass die aktuelle Zinsstrukturkurve verwendet wird, um die zukünftige Entwicklung der Zinsstruktur besser darstellen zu können. Weiterhin ist ein Vorteil des Hull und White Modells die Berücksichtigung der Mean Reversion.

Hull und White modellieren die Short Rate über einen so genannten It$\widehat{o}$-Prozess [2] in der Form

$$\begin{aligned} dr(t) &= (\theta(t) - ar(t))\,dt + \sigma dz(t) \\ &= a\left[\frac{\theta(t)}{a} - r(t)\right] dt + \sigma dz(t), \end{aligned}$$

wobei a und σ konstant sein sollen.
Die Mean Reversion ist besonders in der zweiten Darstellung gut erkennbar. Die Short Rate strebt mit der Intensität a zum Zeitpunkt t gegen das langfristige Mittel $\frac{\theta(t)}{a}$.

Kalibrierung des Modells von Hull und White

$\theta(t)$ ist so definiert, dass die aktuelle Zinsstruktur abgebildet wird:

$$\theta(t) = \frac{\partial}{\partial t}F(0,t) + aF(0,t) + \frac{\sigma^2}{2a}\left(1 - e^{-2at}\right)$$

Der letzte Summand dieser Gleichung nimmt eher sehr kleine Werte an. Wird

[2] Dabei handelt es sich um einen stochastischen Prozess. Die Herleitung dessen ist in den Büchern [HaDiKa02] und [Hul06] aus dem Literaturverzeichnis zu finden.

er vernachlässigt und setzt man die Näherung in die erste Darstellung des Prozesses von $r(t)$ ein, so ist ersichtlich, dass der Prozess für die Short Rate zum Zeitpunkt t den Drift $\frac{\partial}{\partial t}F(0,t) + a\left(F(0,t) + r(t)\right)$ besitzt. Also folgt $r(t)$ im Mittel der anfänglichen Kurve der momentanen Forward Rate. Bei Abweichungen der Short Rate, tendiert diese mit der Rate a wieder zurück.

Der Preis eines Zerobonds zu einem zukünftigen Zeitpunkt t ist in diesem Modell durch

$$P(t,T) = A(t,T)e^{-B(t,T)r(t)}$$

gegeben. Dabei gilt für

$$\begin{aligned}\ln\left(A(t,T)\right) = \ln\left(\frac{P(0,T)}{P(0,t)}\right) - B(t,T)\frac{\partial}{\partial t}\ln P(0,t) \\ - \frac{\sigma^2}{4a^3}\left(e^{-aT} - e^{-at}\right)^2\left(e^{2at} - 1\right)\end{aligned}$$

und für den Cashbond

$$B(t,T) = \frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a} \quad .$$

Der Preis des Zerobonds ist abhängig vom kurzfristigen Zinssatz zum Zeitpunkt t und von den aktuellen Preisen eines Zerobonds, die aus der aktuellen Zinsstruktur ermittelt werden kann.

2.4 Die Bewertung europäischer Zinsoptionen über das Hull und White Modell

Bisher wurden europäische Optionen betrachtet, deren Basiswert Aktien entsprechen. Die Bewertung von Calls und Puts konnte mittels der Black-Scholes-Formel vorgenommen werden. Wie aber bereits festgestellt, ist es notwendig, Optionen in Augenschein zu nehmen, die vom Zinsniveau abhängig sind. Das heißt, der Basiswert entspricht einem Zinsderivat. Die Bewertung über die Black-Scholes-Formel ist auch hier möglich. Allerdings bedarf es einer neuen Modellierung, um die Bewertung an Zinsderivate als Basiswert anzupassen.

Mit Hilfe des Modells von Hull und White kann die Bewertung von Optionen auf Zerobonds vorgenommen werden. Im Folgenden wird das Verfahren beschrieben.
Für eine europäische Option werden die nachstehenden Daten als gegeben angenommen:

$P(t_0, t)$	–	Zerobond mit einer Laufzeit von $[t_0, t]$
N	–	Nennwert des Zerobonds
K	–	Basispreis
T	–	Fälligkeit der Option
$P(t_0, T)$	–	Zerobond für die Laufzeit der Option

Der heutige Preis einer europäischen Call-Option beziehungsweise einer europäischen Put-Option mit der Fälligkeit in T auf einen Zerobond mit einer Laufzeit bis zum Zeitpunkt t ist dann gegeben durch

$$c(t_0) = NP(t_0, t)\mathbf{\Phi}(h) - KP(t_0, T)\mathbf{\Phi}(h - \sigma_P)$$

$$p(t_0) = KP(t_0, T)\mathbf{\Phi}(-h + \sigma_P) - NP(t_0, t)\mathbf{\Phi}(-h)$$

mit

$$h = \frac{1}{\sigma_P} \ln\left(\frac{P(t_0, t)N}{P(t_0, T)K}\right) + \frac{\sigma_P}{2}$$

und der Standardabweichung des Logarithmus des Zerobondpreises

$$\sigma_P = \frac{\sigma}{a}\left(1 - e^{-a(t-T}\right)\sqrt{\frac{1 - e^{-2a(T-t_0)}}{2a}} \; .$$

Zinsderivate haben nicht immer die einfache Struktur eines Zerobonds. Bei den meisten Zinsanleihen werden während der Laufzeit Auszahlungen fällig. Wird eine Option auf ein Zinsderivat mit Kupons betrachtet, so ist es in diesem Modell möglich, die Option als eine Summe von Optionen auf je einen Zerobond zu betrachten. Das ist ausführbar, da sich der Preis eines Zerobonds gemäß der Short Rate entwickelt. Weist diese eine steigende Tendenz auf, so wird der Zerobondpreis sinken. Ebenso ist die Umkehrung gültig. Sinkt also die Short Rate, so steigt der Preis eines Zerobonds.
Das Vorgehen zur Preisermittlung für eine europäische Put-Option auf eine Kupon-Anleihe wird im weiteren Verlauf vorgestellt. Dazu soll die folgende Notation gelten:

K	–	Basispreis
T	–	Fälligkeitstermin
c_j	–	Zahlung zur Zeit s_j mit $T \leq s_j$ und $j = 1, ..., l$
$P(t_1, t_2)$	–	Preis des Zerobonds zur Zeit t_1 mit Fälligkeit in t_2 und zum Zinssatz von r

Die Kupons werden aufsummiert und zum Zeitpunkt T abgezinst. Es gibt einen Zinssatz r^*, welcher der Gleichung

$$K = \sum_{j=1}^{l} c_j \ P^*(T, s_j)$$

genügt. Ist der Basispreis K kleiner als die Auszahlungen hat die Option keinen Wert für ihren Inhaber. Besteht ein umgekehrtes Verhältnis, so muss $r(t) > r^*$ erfüllt sein, denn dann kann der Optionsinhaber mit einem Ertrag rechnen.
Der Payoff bildet sich wie folgt:

$$p_l = \max \left\{ K - \sum_{j=1}^{l} c_j \ P(T, s_j), 0 \right\}$$

Das Einsetzen des Basiswertes ergibt

$$
\begin{aligned}
p_l &= \max\left\{ \sum_{j=1}^{l} c_j \ P^*(T, s_j) - \sum_{j=1}^{l} c_j \ P(T, s_j), 0 \right\} \\
&= \sum_{j=1}^{l} c_j \ \max\left\{ P^*(T, s_j) - P(T, s_j), 0 \right\}
\end{aligned}
$$

Der Payoff von den l Put-Optionen auf Zerobonds stimmt mit dieser Gleichung überein. Jeder Zerobond eines Puts hat dabei den Nennwert

$$
K_{s_j} = P^*(T, s_j).
$$

Somit entspricht der Preis des Puts auf ein Zinsderivat mit l Auszahlungen gleich dem Preis des gebildeten Portfolios.

Diese Übertragung von einer Put-Option auf eine Kupon-Anleihe hin zu einer Summe von Puts auf einzelne Zerobonds wurde hier vorgestellt, um dieses Verfahren in Kapitel 3.4.1.3 zu verwenden. Für eine europäische Call-Option kann der Ablauf analog durchgeführt werden.

2.5 Bewertungsmethode für eine Bermuda-Option

Die Bewertungsmethoden für europäische Optionen lassen geschlossene Formeln zu, da die Beschaffenheit von europäischen Calls und Puts unkompliziert ist. Es existieren allerdings noch eine Vielzahl von anderen Optionen, die unterschiedlichen Eigenschaften folgen.
Zu den exotischen Optionen gehörend ist die **Bermuda-Option**. Sie besitzt gegenüber einer europäischen Option mehrere Ausübungszeitpunkte während der Laufzeit, die aber zu Beginn vertraglich festgehalten werden.
Die Vorstellung der Bermuda-Option wird vorerst mit Aktien als Basiswert vorgenommen. Bevor jedoch auf die Bewertung solcher Optionen eingegangen werden soll, wird auch hier der Basiswert auf Zinsderivate verändert.
Die Abbildung 2.4 verdeutlicht an Hand eines Zeitstrahls den Ablauf einer Bermuda-Option.

t_0 $\quad t_1^a \quad \ldots \quad t_k^a \quad \ldots \quad t_n^a = T$

|———|—————|——————|————>

Abbildung 2.4: *Zeitstrahl über die Laufzeit einer Bermuda-Option*

Die Laufzeit einer Bermuda-Option wird durch das Zeitintervall $[t_0, T]$ begrenzt. Dabei ist $T = t_n^a$ der letzte Ausübungstermin und gleichzeitig die Fälligkeit der Option und t_0 der vertragliche Beginn. Alle weiteren Zeitpunkte, an denen eine Ausübung möglich ist, sind durch t_k^a mit $1 \leq k \leq n$ gekennzeichnet. Das heißt, es gibt genau n Ausübungszeitpunkte innerhalb der Laufzeit der Option.
Die Unterscheidung in Call und Put bei Bermuda-Optionen gilt wie bei europäischen Optionen. Ebenso entspricht die Notation dem Vorangegangenen:

S	–	aktueller Basiswert
K	–	Basispreis
t_k^a	–	Ausübungszeitpunkte während der Laufzeit mit $1 \leq k \leq n$
T	–	Fälligkeit der Option
$S(t_k^a)$	–	Basiswert beim Ausübungszeitpunkt t_k^a

Bermuda-Optionen auf Aktien können mittels Binomialmodelle bewertet wer-

den, wie auch das vorgestellte Modell von Cox, Ross und Rubinstein. Ein Binomialmodell gibt die Gelegenheit zu jedem Zeitpunkt innerhalb der Laufzeit den Wert der Option zu berechnen. Damit kann ein günstiger Zeitpunkt für die Ausübung einer Bermuda-Option schnell gefunden werden.
Wie allerdings im letzten Abschnitt erläutert wurde, gibt es Unterschiede bei der Bewertung von Zinsoptionen. Die wichtigste Besonderheit bei Zinsoptionen ist die Beachtung der Mean Reversion. Das Binomialmodell stellt dem Basiswert frei, welche Entwicklung er annimmt. Das heißt, er kann innerhalb einer Laufzeit mit einem sehr hohen, aber auch einem sehr niedrigen Niveau gerechnet werden. Somit ist die Bewertungsmethode mittels Binomialbäumen nicht geeignet für Zinsoptionen. Eine entsprechende Erweiterung eines Binomialbaums ist durch das Einfügen eines weiteren Freiheitsgrades realisierbar und wird dann Trinomialbaum genannt. Damit besteht für die Zinsstruktur die Möglichkeit, nicht nur sich nach oben und nach unten auszubreiten, sondern auch einen Zinssatz über ein oder mehrere Perioden bei einem Wert zu halten. Des Weiteren existieren zwei weitere Verzweigungen, die die Beachtung der Mean Reversion und eine genaue Anpassung der anfänglichen Zinsstruktur möglich machen. Auch in diesem Modell ist es realisierbar, den besten Ausübungszeitpunkt zu ermitteln, da der Wert einer Bermuda-Zinsoption jederzeit berechenbar ist.
Das Modell zur Bewertung von Zinsoptionen wird im nächsten Abschnitt vorgestellt.

2.5.1 Das Trinomialbaum-Modell

Die analytische Berechnung für eine Zinsoption über das Hull und White Modell wurde bereits im Kapitel 2.4 präsentiert. Für europäische Zinsoptionen ist diese Berechnung ausreichend. Hier handelt es sich allerdings um Bermuda-Zinsoptionen, die mehrere Ausübungszeitpunkte besitzen. Es ist also elementar, auch innerhalb der Laufzeit den Optionswert berechnen zu können, um den rentabelsten Zeitpunkt zur Ausübung ermitteln zu können. Dazu wird in dieser die numerische Berechnung über einen Trinomialbaum mit dem Hull und White Modell als Grundlage verwendet. Dieses Verfahren soll an dieser Stelle dargestellt werden.

Im Allgemeinen ist das Trinomialbaum-Modell ähnlich wie das Binomialmodell. Es wurde eine weitere Verzweigung eingefügt, so dass jeder Knoten mit drei Freiheitsgraden bestückt ist. Um den Eigenschaften der Zinsstruktur gerecht zu werden, ist es sachdienlich, weiterhin alternative Verzweigungsmöglichkeiten einzuführen. Dazu die Abbildung 2.5:

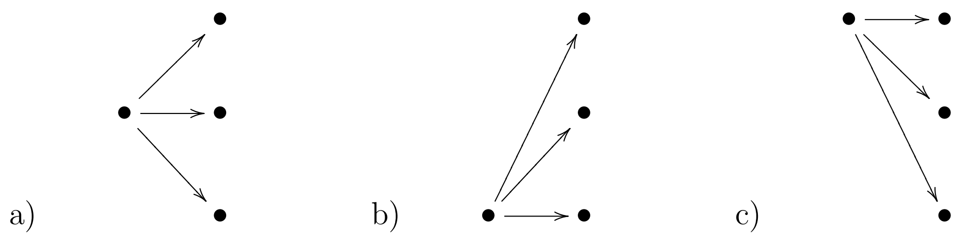

Abbildung 2.5: *Verzweigungsmöglichkeiten im Trinomialbaum*

Die Darstellung in Abbildung 2.5 a) entspricht der Standardverzweigung. Abbildung 2.5 b) und c) zeigen eine andere Art der Verzweigung, mit der die Eigenschaft der Mean Reversion im Modell sehr gut umsetzbar ist. Hat der Zinssatz einen hohen Wert angenommen, so könnte eine Verzweigung wie in 2.5 c) verwendet werden, um zum langfristigen Durchschnitt des Zinsniveaus zurück zu kehren. Analog verhält es sich mit niedrigen Zinssätzen und der 2.5 b).

In einer Veröffentlichung aus den 90-er Jahren konstruierten Hull und White ein Verfahren für das Trinomialbaum-Modell. Dieses Verfahren baut auf das hier vorgestellte Zinsstrukturmodell von Hull und White auf, ist aber auch für andere Ein-Faktor-Modelle geeignet.
Wie bereits vorgestellt, folgt die Short Rate r nach Hull und White dem Prozess

$$dr = [\theta(t) - ar]\, dt + \sigma dz$$

Die Spot Rate R soll für jedes Teilintervall Δt des Baumes dem selben Prozess entsprechen.

$$dR = [\theta(t) - aR]\, dt + \sigma dz$$

Der Ansatz zu diesem numerischen Berechnungsverfahren sieht einen Zinssatz R^* vor, für den der Prozess

$$dR^* = -aR^* dt + \sigma dz$$

gilt. R^* weist die nachstehenden Eigenschaften auf:

- Der Anfangswert von R^* ist Null.
- Mit $R^*(t_0) = 0$ ist der Prozess symmetrisch.
- Für den Abstand der Zinssätze im Baum gilt $\Delta R = \sigma\sqrt{3\Delta t}$.
- Die betragsmäßigen Zuwächse in jedem Δt sind normalverteilt mit

$$\mathbf{E}\left(R^*(t+\Delta t) - R^*(t)\right) = -aR^*(t)\Delta t$$
$$\mathbf{V}\left(R^*(t+\Delta t) - R^*(t)\right) = \sigma^2\Delta t \ ,$$

  wobei alle Terme höherer Ordnung von Δt vernachlässigt werden.

Mittels dieser Eigenschaften kann ein Trinomialbaum für R^* gebildet werden. Die Knoten des Baumes werden mit (i,j) bezeichnet. Mit $t_i = i\Delta t$ wird durch $i \in \mathbb{N}$ der Zeitpunkt innerhalb der Laufzeit bestimmt und wegen $R^* = j\Delta R$ zeigt $j \in \mathbb{Z}$ das Niveau des Zinssatzes an. Um der Mean Reversion gerecht zu werden, verändert sich die Art der Verzweigung im Baum für R^* für hinreichend große und kleine j von der Standardverzweigung zu denen in Abbildung 2.5 b) und c) dargestellten Formen. Dazu wird ein j_{max} und ein j_{min} definiert, für die auf Grund der Symmetrie-Eigenschaft des Baumes $j_{max} = -j_{min}$ gelten muss. Um immer positive Wahrscheinlichkeiten für die Bewegungen der Zinsstruktur innerhalb des Trinomialbaumes zu gewährleisten, haben Hull und White den Wert auf $j_{max} = \left\lfloor \frac{0,184}{a\Delta t} \right\rfloor$ gesetzt. Damit ist die Verzweigung des Trinomialbaumes bestimmt und ein Beispiel in Abbildung 2.6 dargestellt.

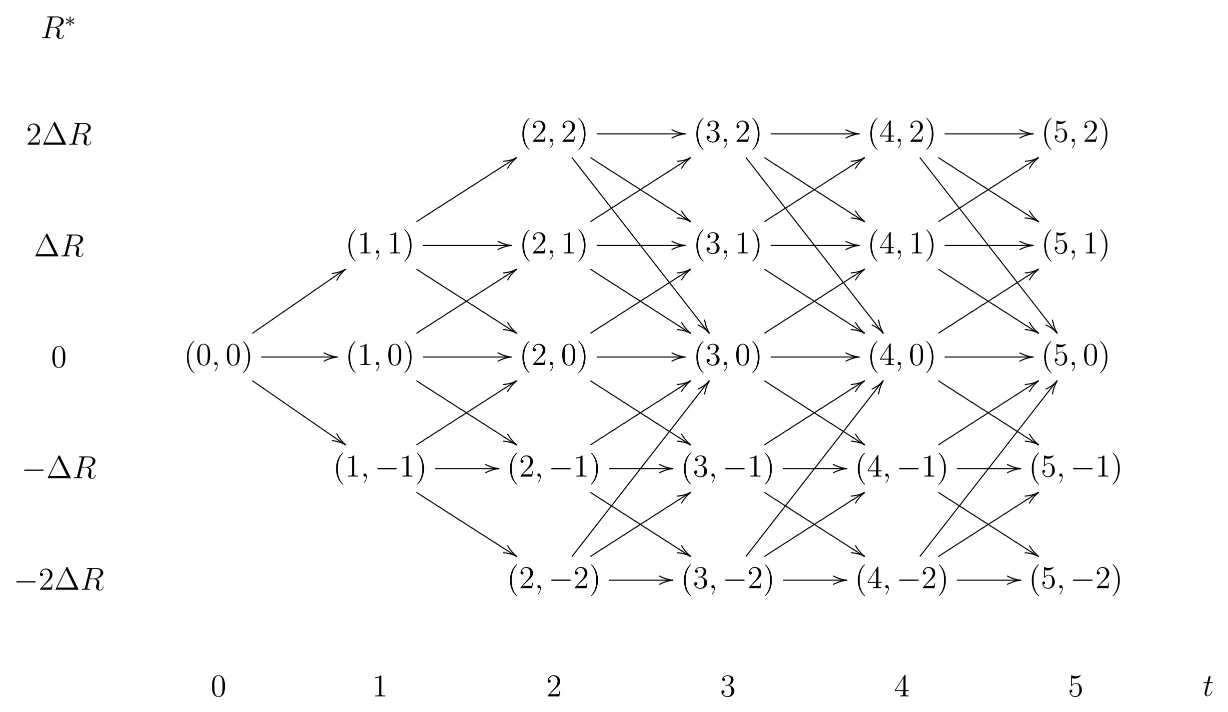

Abbildung 2.6: *Trinomialbaum mit* $j_{max} = 2$ *und* $j_{min} = -2$

Mit $j_{max} = 2$ und $j_{min} = -2$ ist der Trinomialbaum aus Abbildung 2.6 beschränkt. Das bedeutet, dass das Zinsniveau R^* nicht höher beziehungsweise niedriger werden kann, als $2\Delta R$ beziehungsweise $-2\Delta R$.
Die Zeit wird mit t symbolisiert. Aus der Anzahl i der bereits betrachteten Zeitintervalle Δt und dem Faktor j wird die Bezeichnung des Knotens (i, j) deutlich. Weiterhin ist aus der Abbildung 2.6 ersichtlich, dass die Verzweigung sich bei einem Zinsniveau von $j_{max}\Delta R$ beziehungsweise $-j_{max}\Delta R$ entsprechend verändert. Dies geschieht zur Berücksichtigung der Mean Reversion.

Im nächsten Schritt werden die Wahrscheinlichkeiten bestimmt, mit der die Zinssätze ihre Entwicklung fortsetzen. Hierzu sind die Verzweigungen mit ihren Wahrscheinlichkeiten in Abbildung 2.7 dargestellt.

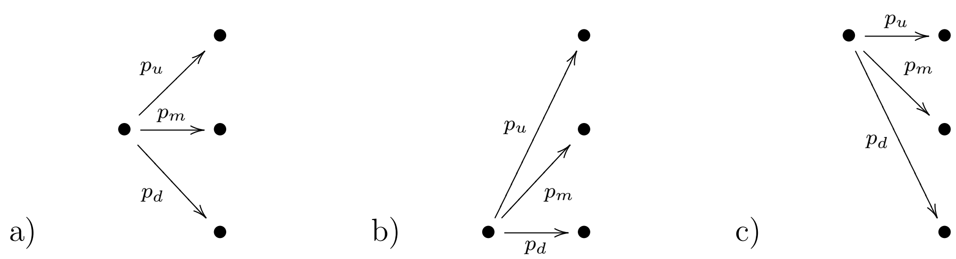

Abbildung 2.7: *Verzweigungsmöglichkeiten mit den Wahrscheinlichkeiten*

Wie im Binomialmodell von Cox, Ross und Rubinstein werden hier ebenso die Wahrscheinlichkeiten berechnet. Für die Standardverzweigung gelten dazu die Ausdrücke

$$\begin{aligned} p_u(\Delta R) + p_m(0) - p_d(\Delta R) &= -aj\Delta R\Delta t \\ p_u(\Delta R)^2 - p_d(\Delta R)^2 - a^2j^2(\Delta R)^2(\Delta t)^2 &= \sigma^2\Delta t \\ p_u + p_m + p_d &= 1 \end{aligned}$$

Mit $R^* = j\Delta R$, dem Erwartungswert $-aj\Delta R\Delta t$ und der Varianz $\sigma^2\Delta t$ der durchschnittlichen Änderung von R^*.
Wird $\Delta R = \sigma\sqrt{3\Delta t}$ eingesetzt, ergeben sich als Lösung des Gleichungssystems die Werte für p_u, p_m und p_d:

$$
\begin{aligned}
p_u &= \frac{1}{6} + \frac{1}{2}\left(a^2 j^2 (\Delta t)^2 - aj\Delta t\right) \\
p_m &= \frac{2}{3} - a^2 j^2 (\Delta t)^2 \\
p_d &= \frac{1}{6} + \frac{1}{2}\left(a^2 j^2 (\Delta t)^2 + aj\Delta t\right)
\end{aligned}
$$

Für die Verzweigung, wie sie in Abbildung 2.7 b) dargestellt ist, gilt das Gleichungssystem

$$
\begin{aligned}
p_u(2\Delta R) + p_m(\Delta R) + p_d(0) &= -aj\Delta R\Delta t \\
p_u 4(\Delta R)^2 - p_m(\Delta R)^2 &= \sigma^2\Delta t + a^2 j^2 (\Delta R)^2 (\Delta t)^2 \\
p_u + p_m + p_d &= 1,
\end{aligned}
$$

dessen Lösung das Ergebnis

$$
\begin{aligned}
p_u &= \frac{1}{6} + \frac{1}{2}\left(a^2 j^2 (\Delta t)^2 + aj\Delta t\right) \\
p_m &= -\frac{1}{3} - a^2 j^2 (\Delta t)^2 - 2aj\Delta t \\
p_d &= \frac{7}{6} + \frac{1}{2}\left(a^2 j^2 (\Delta t)^2 + 3aj\Delta t\right)
\end{aligned}
$$

liefert. Entsprechend trifft für die Verzweigungsmöglichkeit aus Abbildung 2.7 c) das Gleichungssystem

$$
\begin{aligned}
p_u(0) - p_m(\Delta R) - p_d(2\Delta R) &= -aj\Delta R\Delta t \\
p_m(\Delta R)^2 - p_d 4(\Delta R)^2 &= \sigma^2\Delta t + a^2 j^2 (\Delta R)^2 (\Delta t)^2 \\
p_u + p_m + p_d &= 1,
\end{aligned}
$$

mit der Lösung

$$
\begin{aligned}
p_u &= \frac{7}{6} + \frac{1}{2}\left(a^2 j^2 (\Delta t)^2 - 3aj\Delta t\right) \\
p_m &= -\frac{1}{3} - a^2 j^2 (\Delta t)^2 + 2aj\Delta t \\
p_d &= \frac{1}{6} + \frac{1}{2}\left(a^2 j^2 (\Delta t)^2 - aj\Delta t\right)
\end{aligned}
$$

zu. Die Wahrscheinlichkeiten werden also aus den Konstanten a und Δt und der variablen Größe j berechnet. Daraus lässt sich erschließen, dass der Nachfolgerknoten $(i{+}1, j)$ eines Knotens (i, j) nach einer Geradeaus-Bewegung die gleichen Wahrscheinlichkeiten für die Verzweigung besitzt, wie (i, j) selbst.

Der nächste große Arbeitsschritt in diesem Verfahren ist die Überführung des Trinomialbaumes von R^* in den Trinomialmbaum für R, wobei die Knoten aus dem bereits konstruierten Baum so versetzt werden müssen, um die anfängliche Zinsstruktur exakt wieder zugegeben. Dazu wird

$$\alpha(t) = R(t) - R^*(t)$$
$$\alpha_i(i\Delta t) = R(i\Delta t) - R^*(i\Delta t)$$

definiert. Dabei entsteht der Differenzprozess

$$d\alpha = (\theta(t) - a\alpha(t))$$

Des Weiteren wird $Q_{i,j}$ als Wert eines Zerobonds mit einem Nennwert von einem Euro, der im Knoten (i, j) fällig wird, definiert. α_i und $Q_{i,j}$ werden so berechnet, dass die aktuelle Zinsstruktur so exakt wie möglich dargelegt wird.

Wird vorausgesetzt, dass die ersten $Q_{m,j}$ mit $0 \leq m$ bereits ermittelt wurden. Der Preis eines Zerobonds, welcher zum Zeitpunkt $(m+1)\Delta t$ fällig wird, hat den Wert

$$P_{m+1} = \sum_{j=-n_m}^{n_m} Q_{m,j} e^{-(\alpha_m + j\Delta R)\Delta t} \ .$$

Dabei gilt im Knoten (m, j) der Zinssatz $\alpha_m + j\Delta R$ und n_m gibt die Anzahl der Knoten an, die oberhalb beziehungsweise unterhalb des zentralen Knotens zum Zeitpunkt $m\Delta t$ liegen. Um den Wert für α_m zu bekommen, wird die Gleichung umgestellt:

$$\alpha_m = \frac{\ln\left(\sum_{j=-n_m}^{n_m} Q_{m,j} e^{-j\Delta R\Delta t}\right) - \ln\left(P_{m+1}\right)}{\Delta t}$$

Dann sind als nächstes die Werte für $Q_{m+1,j}$ zu bestimmen.

$$Q_{m+1,j} = \sum_k Q_{m,k} p(k,j) e^{-(\alpha_m + k\Delta R)\Delta t}$$

$p(k,j)$ ist dabei die Wahrscheinlichkeit für die Entwicklung des Zinssatzes von Knoten (m,k) zum Knoten $(m+1,j)$. Summiert wird über alle k, für die der Summand nicht Null ergibt.

Kapitel 3

Bewertung von Optionen in der Lebensversicherung unter dem finanziellen Aspekt

Das erste Kapitel dieser Arbeit wurde genutzt, um Optionen und ihre Bewertung in der Finanzwelt darzustellen. Im Folgenden sollen nun Optionen in Lebensversicherungen unter dem finanziellen Aspekt untersucht und bewertet werden. Dazu wird eine Einführung gegeben, um welche Optionen es sich handeln wird, warum es wichtig ist, diese zu untersuchen und wie die Bewertung vorgenommen werden kann.

3.1 Einführung von Optionen in der Lebensversicherung

Klassische Lebensversicherungsprodukte auf dem deutschen Markt zeichnen sich durch Garantien und Optionen aus. Bei den Garantien handelt es sich beispielsweise um die garantierte Rückvergütung[1], falls der Versicherungsnehmer die Kündigung einreicht. Weiterhin wird jeder Tarif eines Versicherungsunternehmens mit dem garantierten rechnungsmäßigen Zins (aktueller Höchstrechnungszins $2,25\%$) kalkuliert.
Die Optionen eines jeden Tarifs und die genauen Ausprägungen sind in dem Bedingungswerk des Versicherungsunternehmens zu finden.

[1] Die Rückvergütung wird als Rückkaufswert, welcher nach dem seit 01.01.2008 gültigen Versicherungsvertragsgesetz (VVG) die Deckungsrückstellung ist, abzüglich eines vereinbarten und angemessenen Stornoabzugs bezeichnet.

Option

> wird vom lateinischen Wort „optio“ abgeleitet und bedeutet „freier Wille“.
> Allgemein kann gesagt werden, dass eine Option ein Wahlrecht ist.
> Speziell in einer Versicherung ist es ein Wahlrecht des Versicherungsnehmers, welches im Bedingungswerk vereinbart und beschrieben wird.
> Mit einer Option hat der Versicherungsnehmer die Möglichkeit, seinen derzeitigen Versicherungsvertrag unter bestimmten Bedingungen anzupassen.

Der Versicherungsnehmer bekommt durch die in Lebensversicherungsverträgen enthaltenen Optionen die Gelegenheit, auf Veränderungen in seinem Leben zu reagieren und seinen Vertrag an die neuen Umstände anzugleichen.
Die Lebensversicherungsunternehmen bieten immer mehr Optionen an, um dem Wettbewerb standhalten zu können. Denn mit erhöhter Flexibilität für die Altersvorsorge und Garantien wie der garantierte Zinssatz werden heutzutage die Produkte für den Versicherungsnehmer attraktiver gestaltet.
Bisher sind solche Optionen in den einzelnen Tarifen nicht einkalkuliert worden, sondern werden als kostenlose Zugabe angeboten. Nach gründlichen Analysen seitens der Deutschen Aktuarsvereinigung (DAV) ist den Lebensversicherungsunternehmen mittlerweile bewusst, dass bei der Ausübungen die Kosten für solche Optionen und Garantien enorm groß sein können. Daher ist es von aufstrebender Wichtigkeit, diese Kosten genauer zu untersuchen.
Im Folgenden werden zwischen Finanzoptionen und Optionen, die biometrischen Charakter haben, unterschieden. Die Finanzoptionen werden im nächsten Abschnitt genauer erläutert, bevor die Bewertung unternommen werden soll. Die Optionen mit biometrischen Charakter werden im kommenden Kapitel vorgestellt und bewertet.

3.2 Finanzoptionen

Bei der Ausübung von Finanzoptionen können für ein Lebensversicherungsunternehmen finanzielle Nachteile entstehen. Um einen Überblick zu gewinnen, werden die Finanzoptionen im Folgenden aufgelistet sowie die wichtigsten und geläufigsten Ausprägungen beschrieben.
Begonnen wird mit dem Kapitalwahlrecht, da dies wohl die bedeutendste Option ist.

Das Kapitalwahlrecht

Die wichtigste Option, die in dieser Arbeit auch am genauesten untersucht werden soll, ist das bei aufgeschobenen Rentenversicherungen angebotene Kapitalwahlrecht. Es bietet dem Versicherungsnehmer die Möglichkeit, statt der lebenslangen Rentenzahlungen eine einmalige Kapitalabfindung in Anspruch zu nehmen. Bei Ausübung der Option endet der Versicherungsvertrag mit der Auszahlung der entsprechenden Summe. Dabei besteht die Kapitalabfindung aus dem angesparten Kapital, den garantierten Zinsen und den Überschüssen.
Um steuerlich Vorteile bei der Wahl der Kapitalabfindung nutzen zu können, sollte der Versicherungsvertrag vor dem 01.01.2005 abgeschlossen worden sein. Weiterhin wird vorausgesetzt, dass die versicherte Person das 60. Lebensjahr vollendet haben muss und eine Vertragslaufzeit von mindestens 12 Jahren gegeben ist. Beträgt die Vertragslaufzeit genau 12 Jahre, so ist die Ausübung nur innerhalb der letzten fünf Monate steuerlich nicht schädlich. Unter Einhaltung dieser Vorgaben werden die Erträge nur zu 50% versteuert. Ist dies nicht der Fall, so wird eine Versteuerung von 100% vorgenommen.
Ein jedes Lebensversicherungsunternehmen kann in seinem Bedingungswerk weitere Einschränkungen zur Nutzung des Kapitalwahlrechts vornehmen. Ein Beispiel hierfür ist eine bestimmte Frist, die es einzuhalten gilt, wenn die Kapitalabfindung vom Versicherungsnehmer beantragt wird.
Das Kapitalwahlrecht ist auch als flexiblere Teilkapitaloption auf dem deutschen Markt zu finden. Dabei kann der Versicherungsnehmer sich einen Teil der Kapitalabfindung auszahlen lassen und der verbleibenden Anteil wird als temporäre oder lebenslange Rente fällig. Nicht nur in aufgeschobenen Rentenversicherungen wird das Kapitalwahlrecht angeboten. Auch bei einer Direktversicherung kann der Versicherungsnehmer sich zwischen der lebenslangen Rente und der Kapitalabfindung

entscheiden. Bei der staatlich geförderten Riester - Rente gibt es die Möglichkeit, sich bis zu 30% des vorhandenen Kapitals als Abfindung bei Leistungsbeginn auszahlen zu lassen.

In aufgeschobenen Rentenversicherungen sind oftmals die Aufschuboption und die Abrufoption enthalten, die beide ein flexiblen Rentenzahlungsbeginn bieten.
Die Aufschub- und Abrufoption wird ebenfalls bei kapitalbildenden Lebensversicherungen angeboten und sichert ein anpassungsfähiges Vertragsende.

Die Aufschuboption bei aufgeschobenen Rentenversicherungen

Der Versicherungsnehmer einer aufgeschobenen Rentenversicherung besitzt das Recht am Ende der Aufschubzeit den Rentenzahlungsbeginn hinauszuzögern, also die Aufschubzeit zu verlängern.
Eine Fortführung der Beitragszahlungen ist möglich. Der Vertrag kann aber auch zum ursprünglichen Rentenzahlungsbeginn beitragsfrei gestellt werden. Weiterhin besteht die Möglichkeit für den Versicherungsnehmer, während des verlängerten Aufschubs eine Abrufoption durchzuführen. Dabei gelten dann die Bestimmungen der Abrufoption.
Eventuell muss eine Rentengarantiezeit bei Vertragsabschluss vereinbart worden sein, um die Aufschuboption ausüben zu können. Dann ist der Aufschub höchstens in Länge der Rentengarantiezeit machbar.
Es können weitere Bedingungen, wie beispielsweise Fristen gelten.

Die Aufschuboption bei kapitalbildenden Lebensversicherungen

Der Versicherungsnehmer einer kapitalbildenden Lebensversicherung hat am Ende der Vertragslaufzeit das Recht, diese zu verlängern und somit seinen Todesfallschutz zu verlängern.
Eine Fortführung der Beitragszahlungen ist auch hier möglich. Eine Beitragsfreistellung zum ursprünglichen Vertragsende ist auch denkbar. Weiterhin besteht die Möglichkeit für den Versicherungsnehmer, während des (verlängerten) Aufschubs eine Abrufoption durchzuführen. Dabei gelten dann die Bestimmungen der Abrufoption.
Es können weitere Bedingungen, wie beispielsweise Fristen gelten.

Die Abrufoption bei aufgeschobenen Rentenversicherungen

Mit der Abrufoption hat der Versicherungsnehmer das Recht, mit den Rentenzahlungen zu einem früheren Zeitpunkt zu beginnen. Dabei werden die Zahlungen an die vorhandenen Mittel, also an das Deckungskapital, angepasst. Die Ausübung der Abrufoption ist nur in der sogenannten Abrufphase möglich, die meist fünf bis zehn Jahre beträgt. Auch andere Kriterien sind möglich.
Um die Abrufoption nutzen zu können, ist es notwendig, einen Antrag bis spätestens drei Monate vor dem gewünschten Leistungstermin zu stellen.

Die Abrufoption bei kapitalbildenden Lebensversicherungen

Mit der Abrufoption hat der Versicherungsnehmer das Recht, seinen Todesfallschutz zu verkürzen und damit seine Erlebensfallleistung zu einem früheren Zeitpunkt zu erhalten. Diese wird an die vorhandenen Mittel, also an das Deckungskapital, angepasst. Die Ausübung der Abrufoption ist nur in der sogenannten Abrufphase möglich, die meist fünf bis zehn Jahre beträgt. Auch andere Kriterien sind möglich.
Der Vorteil der Abrufoption gegenüber einer Kündigung liegt darin, dass in der Regel bei Ausübung kein Stornoabzug erhoben wird.

Die Option der **vollständigen oder teilweisen Kündigung** ist zentraler Vertragsbestandteil und durch §§ 168 - 169 VVG gesetzlich festgelegt.
Der Versicherungsnehmer hat das Recht, seine Lebensversicherung zum Ende eines jeden Versicherungsjahres zu kündigen. Dabei ist vom Lebensversicherungsunternehmen der Rückkaufswert, wenn denn schon entstanden, abzüglich eines angemessenen und vereinbarten Stornoabzugs zu leisten.
Die Option der **vollständigen oder teilweisen Beitragsfreistellung** ist ebenfalls zentraler Vertragsbestandteil und ist durch § 165 VVG gesetzlich festgelegt.
Der Versicherungsnehmer hat das Recht seine Lebensversicherung zum Ende eines jeden Versicherungsjahres beitragsfrei zu stellen, wenn eine vereinbarte Mindestversicherungsleistung erreicht wurde und der Versicherungsnehmer nicht im Leistungsbezug ist. Ist diese Bedingung nicht erfüllt, so wird wie bei einer Kündigung vorgegangen. Auch hier kann das Versicherungsunternehmen einen Abzug, der vereinbart und angemessen ist, vornehmen.
Diese Wahlrechte sollen hier nicht behandelt werden. Da der Rückkaufswert

bereits mit einem Stornoabzug belastet wird beziehungsweise auch bei Beitragsfreistellung die Möglichkeit des Abzugs gilt, sind diese Optionen somit einkalkuliert. Dabei besteht die Bundesanstalt für Finanzdienstleistungsaufsicht auf einen Nachweis der Stornoabzüge, die damit von höchster Stelle kontrolliert werden.

3.3 Allgemeine Bezeichnungen zu Lebensversicherungen

Um Wiederholungen zu vermeiden, werden die allgemein gültigen Bezeichnungen zu aufgeschobenen Rentenversicherungen und kapitalbildenden Lebensversicherungen aufgeführt. Dazu werden die Versicherungsverträge durch ihre Grunddaten und ihren Leistungsbarwert vollständig definiert.

Ein Leistungsbarwert einer Lebensversicherung entspricht dem Erwartungswert der Leistungen, die bei Erleben oder Tod vom Lebensversicherungsunternehmen fällig werden. Eine Rentenversicherung hat grundsätzlich Erlebensfallcharakter. Das bedeutet beispielsweise, dass die versicherte Person nur dann ihre jährlich vorschüssigen Rentenzahlungen erhält, wenn sie den Zeitpunkt er Fälligkeit überlebt.

Ein Hinweis sei an dieser Stelle noch gegeben. Im Allgemeinen wird unterschieden zwischen dem Versicherungsnehmers und einer versicherten Person. Der Versicherungsnehmer ist die Person, die den Versicherungsvertrag abgeschlossen hat, die jährlich vorschüssigen Beitragszahlungen leistet und alle Rechte und Pflichten innerhalb des Versicherungsvertrages beansprucht. Dagegen ist die versicherte Person bei ihrem Erlebensfall oder beim Todesfall des Versicherungsnehmers die begünstigte Person. Bisher war nur die Rede vom Versicherungsnehmer, da er das Recht hat, Optionen auszuüben. Im weiteren Verlauf dieser Arbeit wird davon ausgegangen, dass Versicherungsnehmer und versicherte Person die selben sind.

3.3.1 Die aufgeschobene Rentenversicherung

Eine aufgeschobene Rentenversicherung wird auch Leibrente genannt. Die Leistungen eines solchen Versicherungsvertrages beginnen nach Ablauf der Aufschubzeit, wenn die versicherte Person diesen Zeitpunkt erlebt. Dann wird zu Beginn eines jeden Versicherungsjahres eine Rentenzahlung fällig. Diese soll vorerst mit $R = 1$ angenommen werden. Dann hat der Leistungsbarwert einer aufgeschobenen Rentenversicherung den folgenden Wert:

$$_{n|}\ddot{a}_x = \sum_{k=0}^{\omega-x-n} {}_{k+n}p_x \;\; v^{n+k} \; R_k$$

Dabei gilt die Notation:

x	–	Alter der versicherten Person
n	–	Aufschubzeit beziehungsweise Rentenbezugsbeginn
t	–	Beitragszahlungsdauer
ω	–	kalkulatorisches Endalter
${}_np_x$	–	n-jährige Überlebenswahrscheinlichkeit eines x-jährigen
v^n	–	Diskontierungsfaktor für n Jahre
R_m	–	Rentenzahlung im m-ten Jahr

Für den Diskontierungsfaktor werden vorerst jährlich gleich bleibende Zinsen v angenommen.
Durch die Abbildung 3.1 wird die aufgeschobene Rentenversicherung mit ihren wichtigsten Zeitpunkten verdeutlicht:

x			t					
0	1	$\dots$	$n-1$	n	$\dots$	m	$\dots$	$\omega - x$
				R_0	$\dots$	R_{m-n}	$\dots$	$R_{\omega-x-n}$

Abbildung 3.1: *Aufgeschobene Rentenversicherung*

Wie erkennbar ist, werden die jährlich vorschüssigen Beitragszahlungen bis zum Rentenbezugsbeginn von der versicherten Person geleistet. Das heißt, es gilt $n = t$. Da die Beiträge jährlich vorschüssig gezahlt werden müssen, ist im $(n-1)$-ten Versicherungsjahr der letzte Beitrag fällig.
Die Bezeichnung des Alters mit x setzt eine männliche versicherte Person voraus. Für weibliche versicherte Personen wird das Alter mit y angegeben. In dieser Arbeit wird sich auf die männlichen Personen beschränkt und somit gilt für das Alter einer versicherten Person immer x.

3.3.2 Die kapitalbildende Lebensversicherung

Eine kapitalbildenden Lebensversicherung enthält eine einmalige Erlebensfallleistung oder eine einmalige Todesfallleistung. Wenn die versicherte Person das Ende der Vertragslaufzeit erlebt, wird die Erlebensfallleistung vom

Lebensversicherungsunternehmen fällig. Stirbt die versicherte Person innerhalb der Laufzeit, so erhalten die Hinterbliebenen eine Todesfallleistung. Der Leistungsbarwert einer kapitalbildenden Lebensversicherung hat den Wert:

$$A_{x,\bar{n}|} = \sum_{k=0}^{n-1} {}_kp_x \;\; q_{x+k} \;\; v^{k+1} \; D_k \; + \; {}_np_x \;\; v^n \; S_n$$

Dabei gilt die Notation:

x	–	Alter der versicherten Person
n	–	Vertragslaufzeit
t	–	Beitragszahlungsdauer
${}_np_x$	–	n-jährige Überlebenswahrscheinlichkeit eines x-jährigen
q_x	–	Sterbewahrscheinlichkeit eines x-jährigen
v^n	–	Diskontierungsfaktor für n Jahre
D_k	–	Todesfallleistung im k-ten Versicherungsjahr
S_n	–	Erlebensfallleistung am Ende der Laufzeit n

In Abbildung 3.2 wird die kapitalbildende Lebensversicherung dargestellt:

x t

0 1 ... $n-1$ n

|——|——————|——|————>

D_0 ... D_n D_{n+1}

S_n

Abbildung 3.2: *Kapitalbildende Lebensversicherung*

Auch hier soll gelten, dass über die gesamte Laufzeit die jährlich vorschüssigen Beitragszahlungen von der versicherten Person geleistet werden. Es gilt also $n = t$ und auch hier ist die letzte Beitragszahlung im Versicherungsjahr $n-1$ zu leisten.

3.4 Bewertung von Finanzoptionen

Die bedeutsamste Option in aufgeschobenen Rentenversicherungen ist das Kapitalwahlrecht. Enthalten in kapitalbildenden Lebensversicherungen ist die Abrufoption und die Aufschuboption. Das Verfahren zur Bewertung dieser drei Finanzoptionen kann immer gleich vorgenommen werden. Im ersten Schritt werden die benötigten Daten gesammelt. Getroffene Voraussetzungen sollen für den einzelnen Versicherungsvertrag gelten. Im nächsten Schritt werden die Finanzoptionen interpretiert als Optionen aus der Finanzwelt. Die Bewertung dieser Optionen wurde bereits vorgestellt und kann mit den gegebenen Daten vollzogen werden.

3.4.1 Bewertung des Kapitalwahlrechts

Das Kapitalwahlrecht ist die bedeutsamste Option in der Lebensversicherung. Aus diesem Grund wird die Option an dieser Stelle unter dem finanziellen Aspekt betrachtet und zu einem späteren Zeitpunkt biometrisch in Augenschein genommen.

3.4.1.1 Benötigte Daten

Die aufgeschobene Rentenversicherung wurde allgemein bereits definiert und beschrieben. Hier sollen spezifische Daten gesammelt werden, die für die Bewertung der Option notwendig sind.
Zum Rentenbezugsbeginn n erhält die versicherte Person eine jährliche Rente in Höhe von R oder die einmalige Kapitalabfindung S_n zum Zeitpunkt n, falls sie das Kapitalwahlrecht ausübt. Das Verhältnis von Kapitalabfindung und Rentenzahlung lässt sich mit dem Diskontierungsfaktor v^m $(0 \leq m \leq \omega - x)$ und der Überlebenswahrscheinlichkeit eines x-jährigen für n Jahre durch

$$v^n S_n = \sum_{m=n}^{\omega-x} {}_{m-n}p_{x+n} \;\; v^m \;\; R$$

beschreiben. Die Gleichung kann nach R umgestellt werden:

$$R = \frac{v^n S_n}{\sum\limits_{m=n}^{\omega-x} {}_{m-n}p_{x+n} \quad v^m} = \frac{S_n}{\sum\limits_{m=n}^{\omega-x} {}_{m-n}p_{x+n} \quad v^{m-n}}$$
$$= \frac{S_n}{\sum\limits_{m=0}^{\omega-x-n} {}_{m}p_{x+n} \quad v^m}$$

In der Kapitalabfindung S_n enthalten sind die garantierten Leistungen sowie die als konstant geltenden Überschüsse.
Unter diesen Bedingungen ist eine genaue Abschätzung der Kapitalabfindung S_n möglich und die Rentenzahlungen R sind berechenbar.
Da die versicherte Person die jährlichen Rentenzahlungen nur dann erhält, wenn sie den Termin der fälligen Leistungen erlebt, werden diese mit den jährlichen Überlebenswahrscheinlichkeiten gewichtet.

$$R_m = {}_{m-n}p_{x+n} \quad R$$

Alle Daten und Werte der aufgeschobenen Rentenversicherung, die hier als relevant gelten, sind nun bekannt.
Im nächsten Schritt muss die Überlegung angestellt werden, wie das Kapitalwahlrecht unter dem finanziellen Aspekt bewertet werden kann.

3.4.1.2 Interpretation des Kapitalwahlrechts

Beim Kapitalwahlrecht hat die versicherte Person die Möglichkeit an statt der Rentenzahlungen eine einmalige Kapitalabfindung zu wählen. Anders ausgedrückt, verkauft sie ihre jährlichen Rentenzahlungen für den Preis der Kapitalabfindung an das Lebensversicherungsunternehmen. Nach den Bedingungswerk des Lebensversicherungsunternehmen hat die versicherte Person dieses Wahlrecht bei Abschluss der aufgeschobenen Rentenversicherung. Vor Ablauf der Aufschubzeit n kann das Kapitalwahlrecht jedoch nicht ausgeübt werden.
Bei genauerer Betrachtung des Kapitalwahlrechts wird die Ähnlichkeit mit einer europäischen Put-Option deutlich:

- Das Kapitalwahlrecht hat eine Laufzeit von n Jahren.
- Am Ende der Laufzeit hat die versicherte Person das Recht, das Kapitalwahlrecht in Anspruch zu nehmen, also die Option auszuüben.
- Bei Ausübung verkauft die versicherte Person ihre jährlichen Rentenzahlungen für die einmalige Kapitalabfindung.
- Das Lebensversicherungsunternehmen ist der Stillhalter der Option und die versicherte Person der Optionskäufer.

Als Basiswert der Put-Option werden bei der Betrachtung von Optionen in Lebensversicherungsverträgen keine Aktien verwendet. Das lässt sich wie folgt erklären. Die Ausübung einer Option, wie das Kapitalwahlrecht hängt nicht vom Aktienmarkt ab, sondern vom Zinsniveau. Die versicherte Person bekommt garantierte Zinsen und Überschüsse innerhalb ihres Versicherungsvertrages. Wenn das Zinsniveau am Markt wesentlich höher ist, als das Lebensversicherungsunternehmen mit garantierten Zinsen und Überschussbeteiligung bietet, wird die versicherte Person eher das Kapitalwahlrecht in Anspruch nehmen. Denn die Kapitalabfindung anderweitig anlegen, bedeutet für die versicherte Person eine höhere Rendite.
Die versicherte Person ist also im Besitzt einer europäischen Put-Option auf ein Wertpapier mit jährlichen Kupons in Höhe von R_m zur Zeit m zum Basispreis auf die Kapitalabfindung S_n. Eine Umwandlung als Portfolio aus mehreren Put-Optionen auf einzelne Zerobonds hat den Vorteil, dass bei der Bewertung eine geschlossene Formel verwendet werden kann und keine Auszahlungen während der Laufzeit beachtet werden müssen.

Die versicherte Person nimmt die Position des Optionskäufers ein. Da aber Optionen in Lebensversicherungsverträgen nicht einkalkuliert werden, zahlt die versicherte Person keine Optionsprämie für das Kapitalwahlrecht. Das Ziel ist also die Ermittlung der Optionsprämie für das Kapitalwahlrecht.

3.4.1.3 Optionsprämie für das Kapitalwahlrecht

Zur Berechnung der Optionsprämie wird die geschlossene Formel von Black-Scholes verwendet, die an das Zinsstrukturmodell von Hull und White angepasst wurde. Dabei wird sich das Verfahren aus Kapitel 2.4 zu Nutze gemacht, worin eine europäische Put-Option auf ein Zinsderivat mit Auszahlungen umgewandelt wird zu einem Portfolio bestehend aus Puts auf einzelne

Zerobonds. Diese Transformation ist hier sehr nützlich, da es sich um einen europäischen Put auf die jährlich vorschüssigen Rentenzahlungen handelt. Dabei kann die Notation aus 2.4 auf das Kapitalwahlrecht übertragen werden.

Die Rentenzahlungen zu den Zeitpunkten $m = n, n+1, ..., \omega - x$ werden als Kupons angesehen. Also sind die Auszahlungstermine s_j mit $j = 1, ..., m$ hier durch den Laufparameter m zu ersetzen. Somit wird die Put-Option als Portfolio dargestellt, welches $\omega - x - n$ Puts auf Zerobonds enthält. Die Fälligkeit der Option wird auf den Rentenbezugsbeginn n gesetzt und der Basispreis entspricht der Kapitalabfindung S_n.
Zusammengefasst bedeutet das:

Basispreis K	$\longrightarrow$	Kapitalabfindung S_n
Fälligkeit T	$\longrightarrow$	Rentenbezugsbeginn n
Kupons c_j zur Zeit s_j mit T $\leq s_j$ und $j = 1, ..., m$	$\longrightarrow$	erwartete Rentenzahlungen R_m mit $m = n, n+1, ..., \omega - x$

Der Payoff der m-ten europäischen Put-Option auf einen Zerobond entspricht

$$\max\{X_m - P(n,m), 0\}$$

Dann wird der Preis der m-ten europäischen Put-Option auf einen Zerobond berechnet, wie im Modell von Hull und White dargestellt:

$$p(m) = X_m \; P(0,n) \; \mathbf{\Phi}(-h_m + \sigma_{P,m}) - P(0,m)\mathbf{\Phi}(-h_m)$$

mit $X_m = P^*(n,m)$, wobei der Zerobond einen Zinssatz r^* enthält, welcher dem entspricht, was ein Lebensversicherungsunternehmen an garantierten Zinsen und Überschüssen bietet. Weiterhin gelten für h_m und $\sigma_{P,m}$:

$$h_m = \frac{1}{\sigma_{P,m}} \; \ln\left(\frac{P(0,m)}{P(0,n) \; X_m}\right) + \frac{\sigma_{P,m}}{2}$$

$$\sigma_{P,m} = \frac{\sigma}{a}\left(1 - e^{-a(m-n)}\right)\sqrt{\frac{1 - e^{-2an}}{2a}}$$

Der Preis der Kapitalabfindung berechnet sich dann aus den aufsummierten Preisen der Puts und der jeweiligen Auszahlung. Gewichtet wird die Summe mit der Überlebenswahrscheinlichkeit, da die Option nur ausgeübt werden kann, wenn die versicherte Person den Termin erlebt.

Preis des Kapitalwahlrechts unter dem finanziellen Aspekt

$$\boxed{\mathbf{KWR_{Fin}} = \; {}_{\mathbf{n}}\mathbf{p_x} \sum_{\mathbf{m=n}}^{\omega-\mathbf{x}} \mathbf{R_m}\ \mathbf{p_m}}$$

3.4.2 Bewertung der Abrufoption

Die Abrufoption, enthalten in einer aufgeschobenen Rentenversicherung, bietet die Möglichkeit eines früheren Rentenbezugs. Wie schnell erkannt wird, ist die Bewertung dieser Option etwas aufwendiger als beim Kapitalwahlrecht.
Im ersten Schritt werden wieder die noch notwendigen Daten gesammelt, gefolgt von der Interpretation der Abrufoption als ein Finanzinstrument. Dann kann die Bewertung der Abrufoption mit einer bereits vorgestellten Bewertungsmethode vorgenommen werden.

3.4.2.1 Benötigte Daten

Für die Abrufoption gibt es eine sogenannte Abrufphase. Innerhalb dieses Zeitraumes kann die Abrufoption ausgeübt werden und so die Zahlung der Erlebensfallleistung vorgezogen werden. Die Abrufphase wird mit $s \in \{0, ..., n\}$ bezeichnet. Es wird also vorerst angenommen, dass während der gesamten Vertragslaufzeit die Option ausgeübt werden kann. In der Praxis handelt es sich meist um eine Abrufphase von fünf Jahren vor dem Ablauf des Versicherungsvertrags, also $s \in \{n-4, ..., n\}$. Zur Verdeutlichung wird die Abbildung 3.3 eingefügt:

x $\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad$ t

$0 \qquad 1 \qquad \ldots \quad (n-s-1) \quad (n-s) \quad \ldots \quad (n-1) \qquad n$

|———|——————|———|——————|———|———>

$\widetilde{D}_0 \quad \ldots \qquad\qquad \widetilde{D}_{n-s-2} \quad \widetilde{D}_{n-s}$

$\widetilde{S}_{n-s}$

Abbildung 3.3: *Kapitalbildende Lebensversicherung mit Abrufphase*

$\widetilde{D}_k$ bezeichnet mit $k = 0, ..., n-s-1$ die Höhe der Todesfallleistung, während $\widetilde{S}_{n-s}$ für die Erlebensfallleistung steht. Die Leistungen sind dabei an das derzeitige Deckungskapital angepasst, welches bei der Ausübung der Option vorhanden ist. Stirbt die versicherte Person vor dem vor verlegten Vertragsende $n-s$, so wird die Todesfallleistung $\widetilde{D}_k$ fällig. Erlebt die versicherte Person diesen Zeitpunkt, so wird die Erlebensfallleistung $\widetilde{S}_{n-s}$ ausgezahlt. Der Leistungsbarwert einer kapitalbildenden Lebensversicherung mit dem vorzeitigen Vertragsende $n-s$ hat den Wert

$$A_{x,\overline{n-s}|} = \sum_{k=0}^{n-s-1} {}_k p_x \;\; q_{x+k} \;\; v^{k+1} \; \widetilde{D}_k \;\; +_{n-s} p_x \;\; v^{n-s} \; \widetilde{S}_{n-s}$$

Die Leistungen bei Vertragsabschluss sind D_k mit $k = 0, ..., n$ für den Todesfall und S_n für den Erlebensfall. Der Leistungsbarwert für die Laufzeit n lautet

$$A_{x,\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{n-1} {}_k p_x \;\; q_{x+k} \;\; v^{k+1} \; D_k \;\; +_n p_x \;\; v^n \; S_n$$

Es wird die Annahme getroffen, dass die Todesfallleistung zu jedem Zeitpunkt mit der Erlebensfallleistung übereinstimmt. Das heißt, es gilt $D_k = S_n$ beziehungsweise $\widetilde{D}_k = \widetilde{S}_{n-s}$. Die Leistungen sollen bereits alle Überschüsse enthalten.

Weiterhin muss beachtet werden, dass in der Abrufphase noch Prämien gezahlt werden. Diese haben einen Wert von

$$P_t = \frac{A_{x,\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x,\overline{t}|} \; S_n}$$

Die Prämienzahlungen[2] werden ebenfalls jährlich vorschüssig von der versicherten Person geleistet. Da Prämien in der Lebensversicherung als allgemein konstant gelten, wird $P = P_t$ gesetzt. Alle notwendigen Werte sind zusammen getragen und somit wird im nächsten Schritt die Abrufoption einer kapitalbildenden Lebensversicherung unter dem finanziellen Aspekt betrachtet.

3.4.2.2 Interpretation der Abrufoption

Mit der Abrufoption kann das Vertragsende vorgezogen werden. Das bedeutet, dass der Todesfallschutz verkürzt und die Leistung bei Erleben früher ausgezahlt wird. Damit verringern sich auch die Werte der Leistungen. Mit anderen Worten verkauft die versicherte Person ihre ursprüngliche Erlebensfallleistung für eine neue Erlebensfallleistung zu einem früheren Zeitpunkt. Nach dem Bedingungswerk eines Lebensversicherungsunternehmens kann die Abrufoption innerhalb der Abrufphase jährlich ausgeübt werden. Somit gibt es mehrere Ausübungszeitpunkte für die Option.
Werden die Einzelheiten zur Abrufoption erfasst, so kann diese als eine Bermuda Option interpretiert werden. Genauer gesagt, handelt es sich um eine Bermuda Put-Option.

- Die Laufzeit der Abrufoption beträgt n Jahre.
- Die Ausübungstermine werden mit m bezeichnet und auf die Zeitpunkte $m = n - s, ..., n - 1$ festgelegt.
- Bei der Ausübung verkauft die versicherte Person ihre Leistungen für geringere Leistungen zu einem früheren Zeitpunkt.
- Das Lebensversicherungsunternehmen wird als Stillhalter gesehen und die versicherte Person als den Optionskäufer.

Mit diesen Überlegungen wird eine Abrufoption als eine Bermuda Put-Option interpretiert. Damit besitzt die versicherte Person eine solche Option auf ihre kapitalbildende Lebensversicherung $A_{x,\overline{n}|}$ für eine kapitalbildende Lebensversicherung mit kürzerer Dauer $A_{x,\overline{n-s}|}$ mit s Ausübungsterminen zu den Zeitpunkten $m = n - s, ..., n - 1$.

[2] $\ddot{a}_{x,\overline{t}|}$ bezeichnet den Leistungsbarwert einer temporären Leibrente über t Jahre. Diese Art von Rente ist in der Praxis nicht sehr weit verbreitet. Aber der Leistungsbarwert wird häufig zur Prämienberechnung herangezogen.

Nun kann die Bermuda Put-Option bewertet werden, um die Optionsprämie zu ermitteln.

3.4.2.3 Optionsprämie für die Abrufoption

Zur Bestimmung der Optionsprämie für die Abrufoption ist es nicht möglich eine geschlossene Formel zu verwenden. Im letzten Kapitel wurde daher die Bewertungsmethode mittels Trinomialbäumen eingeführt, um die Optionsprämie von Bermuda-Optionen berechnen zu können. Diese wurde auf der Grundlage des Zinsstrukturmodells von Hull und White aufgebaut. Nun soll das Verfahren zum Einsatz kommen. Zuvor wird jedoch die Abrufoption als eine Bermuda Put-Option auf eine Kupon-Anleihe dargestellt. Die Kupons enthalten die erwarteten Todesfallleistungen D_k abzüglich der noch fälligen Prämie P_m im m-ten Jahr. Die Beitragszahlungen müssen beachtet werden, da die Beitragszahlungsdauer t zum Zeitpunkt $m \in \{n-s, ..., n-1\}$ noch nicht beendet ist. Dann beträgt der Kupon im m-ten Jahr

$$_{m-1}p_x \; q_{x+m-1} \; D_m \; - \; _mp_x \; P_m$$

Alle weiteren Größen der Bermuda Put-Option sind nachstehend zusammengefasst:

n	–	Fälligkeit
S_n	–	Basiswert
$m = n-s, ..., n-1$	–	Ausübungstermine
$\widetilde{S}_m$	–	Basispreis für den Ausübungstermin m

Auch bei einer Bermuda-Option auf eine Kupon-Anleihe kann die in Kapitel 2.4 geschilderte Umwandlung in mehrere Bermuda-Optionen auf Zerobonds vorgenommen werden. Die obigen Bezeichnungen werden beibehalten.
Wie bereits bekannt ist, wird eine Bermuda-Option mittels Trinomialbäumen bewertet. Dabei wird die Entwicklung der Short Rate aus dem Zerobond in dem Baum dargestellt.
Als Ausgangspunkt wird der Knoten (i, j) in Augenschein genommen. i gibt den Zeitpunkt im Baum an, während j das Niveau der Short Rate wieder spiegelt. Das Verfahren ist in Kapitel 2.5.2 ausführlich erläutert worden. Es wird begonnen mit dem Payoff zur Fälligkeit und es folgt eine Rückwärtsinduktion bis zum Anfang der Laufzeit. Die Werte an den Knoten berechnen sich aus

den Preisen der Vorgängerknoten. Diese werden gewichtet mit den jeweiligen Wahrscheinlichkeiten für eine Verzweigung. Weiterhin müssen die Werte noch mit dem in der Periode gültigen Zinssatz diskontiert werden. Ist der Trinomialbaum vollständig berechnet, so kann geprüft werden, ob zu den Ausübungsterminen m eine Ausübung tatsächlich zweckmäßig ist.
Wird der Ausgangspunkt (i,j) angenommen, beträgt das Niveau der Short Rate $j\Delta r$ zum Zeitpunkt $m = i\Delta t$ mit $n-s \leq m \leq n-1$. Ist die Ausübung zum Zeitpunkt m sinnvoll, kann davon ausgegangen werden, wenn die Voraussetzung einer finanzrationalen versicherten Person gegeben ist, dass die Abrufoption in Anspruch genommen wird. Dann entspricht die Erlebensfallleistung $\widetilde{S}_m$ und der Vertrag gilt damit als beendet. Für die Berechnung des Payoffs gilt, dass zukünftigen Zahlungen von der fälligen Leistung subtrahiert werden. Dazu gehören die erwarteten Todesfallleistungen sowie die ursprüngliche Erlebensfallleistung, jeweils gewichtet mit Überlebens- und Sterbewahrscheinlichkeiten. Die noch zu zahlenden Prämien dagegen werden angerechnet. Weiterhin muss jede erwartete Zahlung auf den Zeitpunkt der Ausübung diskontiert werden. Dazu wird der Zerobond verwendet, der im Trinomialbaum approximiert wurde.
Dann kann der Payoff mit

$$\max \left\{ \begin{array}{l} \widetilde{S}_m - \sum\limits_{k=m+1}^{n} {}_{k-m-1}p_{x+i}\ q_{x+m-1}\ D_k\ P(m,k) \\[2em] -S_n\ {}_{n-m}p_{x+m}\ P(m,n) + \sum\limits_{k=m}^{t-1} {}_{k-i}p_{x+i}\ P_k\ P(m,k), \quad 0 \end{array} \right\}$$

angegeben werden.
$P(m,n)$ bezeichnet den Preis eines Zerobonds im Trinomialbaum im Knoten (i,j) zum Zeitpunkt $m = i\Delta t$ mit dem gültigen Zinssatz $j\Delta r$ in diesem Teilintervall und einem Fälligkeitstermin von $m+1$.

Da die Bewertung der Abrufoption numerisch vollzogen werden muss, kann kein konkreter Optionswert angegeben werden. Vielmehr ergibt sich dieser bei der Aufstellung des Trinomialbaums, wenn die Zerobondpreise berechnet wurden. Denn von diesen hängt der Wert der Abrufoption im Wesentlichen ab. Ist ein sinnvoller Ausübungszeitpunkt gefunden, so wurde ebenso der beste Wert der Option abgeleitet.

3.4.3 Bewertung der Aufschuboption

Eine Aufschuboption kann ebenfalls in einer kapitalbildenden Lebensversicherung impliziert sein. Sie erlaubt einen Aufschub für die Fälligkeit der Erlebensfallleistung und damit einen längeren Todesfallschutz. Die Bewertung wird ähnlich verlaufen, wie beim Kapitalwahlrecht.
Auch hier wird mit dem Festlegen der benötigten Daten und die Interpretation der Aufschuboption als ein Finanzderivat begonnen, um dann die Bewertung der Aufschuboption durchzuführen.

3.4.3.1 Benötigte Daten

Wird die Aufschuboption ausgeübt, so gibt es einen begrenzten Zeitraum, um wie viel Jahre das Vertragsende hinausgezögert werden kann. Dieser Zeitraum wird Aufschubphase genannt. Der Aufschub kann um s Jahre vorgenommen werden. Dies ist in der Abbildung 3.4 dargestellt:

x

0	1	$\dots$	n	$n+1$	$\dots$	$n+s-1$	$n+s$	
|———	|————		|———	|————		|———	|———	>
	$\widetilde{D}_0$	$\dots$	$\widetilde{D}_{n-1}$	$\widetilde{D}_n$	$\dots$	$\widetilde{D}_{n+s-2}$	$\widetilde{D}_{n+s-1}$	
							$\widetilde{S}_{n+s}$	

Abbildung 3.4: *Kapitalbildende Lebensversicherung mit Aufschubphase*

Die Todesfallleistungen $\widetilde{D}_k$ sowie die Erlebensfallleistung $\widetilde{S}_{n+s}$ sind an das derzeitige Deckungskapital angeglichen, welches zum Zeitpunkt $n+s$ verfügbar ist. Der Leistungsbarwert der verlängerten kapitalbildenden Lebensversicherung entspricht

$$A_{x,\overline{n+s}|} = \sum_{k=0}^{n+s-1} {}_kp_x \; q_{x+k} \; v^k \; \widetilde{D}_k + \; {}_{n+s}p_x \; v^{n+s} \; \widetilde{S}_{n+s}$$

Der Lebensversicherungsvertrag ohne die Ausübung der Option hat einen Leistungsbarwert von

$$A_{x,\bar{n}|} = \sum_{k=0}^{n-1} {}_kp_x \; q_{x+k} \; v^k \; D_k + \; {}_np_x \; v^n \; S_n$$

Die Todesfallleistung beträgt D_k mit $k = 0, ..., n-1$ und eine Erlebensfallleistung in Höhe von S_n. Es gilt die Annahme, dass die Todesfallleistung die gleiche Höhe besitzt, wie die Erlebensfallleistung. Es gilt also $D_k = S_n$ und dem zur Folge auch $\widetilde{D}_k = \widetilde{S}_{n+s}$.

Die Beitragszahlungsdauer ist bis zum Zeitpunkt der Ausübung bereits beendet, da $t = n$ gültig sein soll. Damit ist die letzte Prämie zum Zeitpunkt $n-1$ fällig. Die Option kann erst zum Ende des Vertrages also zu n ausgeübt werden. Somit müssen keine Prämien beachtet werden. Es ist bei einigen Lebensversicherungsunternehmen möglich, bei der Ausübung auch eine Verlängerung der Beitragszahlungsdauer zu erreichen. Dann müssen die weiteren Prämien in die Bewertung eingehen[3]. Es sind alle notwendigen Daten zusammen getragen.

3.4.3.2 Interpretation der Aufschuboption

Zur Interpretation der Aufschuboption als ein Finanzderivat werden die folgenden Überlegungen gemacht.
Um das Vertragsende der kapitalbildenden Lebensversicherung hinauszuzögern, kann die Aufschuboption ausgeübt werden. Die Ausübung bewirkt einen Verkauf der Erlebensfallleistung S_n für die dann gültige Leistung $\widetilde{S}_{n+s}$ im Erlebensfall. Im Bedingungswerk eines jeden Lebensversicherungsunternehmens ist festgelegt, um wie viel Jahre der Aufschub begrenzt ist. Dann hat die erweiterte Laufzeit den konkreten maximalen Wert von $n + s$.
Die Aufschuboption kann als europäische Put-Option aufgefasst werden:

- Die Aufschuboption hat eine Laufzeit von n Jahren.
- Am Ende der Laufzeit hat die versicherte Person das Recht, die Aufschuboption auszuüben.
- Bei Ausübung wird die zu n fällige Erlebensfallleistung verkauft für die Leistung zum Zeitpunkt $n + s$.

[3] Zum Vergleich: In Kapitel 3.4.2 wurden die Prämienzahlungen bei der Bewertung der Abrufoption einbezogen.

- Das Lebensversicherungsunternehmen übernimmt die Position des Stillhalters, während die versicherte Person der Optionskäufer ist.

Folglich besitzt die versicherte Person eine europäische Put-Option auf den Basiswert $A_{x,\overline{n}|}$ zu einem Basispreis von $A_{x,\overline{n+s}|}$. Da bei der Ausübung gleichzeitig der Todesfallschutz verlängert wird, ist es notwendig, die Todesfallleistung in die Bewertung der Option mit einfließen zu lassen. Auch diese Option wird in einem Lebensversicherungsvertrag nicht eingepreist, so dass die Optionsprämie ermittelt werden muss.

3.4.3.3 Optionsprämie für die Aufschuboption

Da die Aufschuboption als eine europäische Option interpretiert wird, kann die Bewertung über eine geschlossene Formel durchgeführt werden. Das Vorgehen ist wie bei dem Kapitalwahlrecht.
Die betrachtete europäische Put-Option auf eine Kupon-Anleihe kann durch das beschriebene Verfahren in Kapitel 2.4 in mehrere Put-Optionen auf Zerobonds transformiert werden. Dazu wird die dortige Notation auf die Aufschuboption übertragen. Dabei liegt die Fälligkeit der Option bei dem ursprünglichen Vertragsende n. Der Basiswert wird mit der vertraglichen Erlebensfallleistung S_n gleichgestellt. Der Basispreis entspricht der neuen Erlebensfallleistung $\widetilde{S}_{n+s}$. Die Auszahlungen aus der Anleihe stimmen mit den erwarteten Leistungen überein, die zu den Zeitpunkten $m = n, n+1, ..., n+s$ fällig werden. Bei den erwarteten Leistungen handelt es sich um die gewichteten Todesfallleistungen, die vom Lebensversicherungsunternehmen gezahlt werden, wenn die versicherte Person innerhalb des Zeitraums $[n, n+s]$ stirbt. In der folgenden Übersicht ist die Übertragung der Notation zusammengefasst:

Basispreis K	$\rightarrow$	Erlebensfallleistung $\widetilde{S}_{n+s}$ zum Zeitpunkt $n+s$
Fälligkeit T	$\rightarrow$	ursprüngliches Vertragsende n
Kupons c_j zur Zeit s_j mit T $\leq s_j$ und $j = 1, ..., m$	$\rightarrow$	erwartete Todesfallleistung $\widetilde{D}_m$ mit $m = n, n+1, ..., n+s$ gewichtet mit $_{m-1}p_x$ und q_{x+m-1}

Die m-te europäische Put-Option auf einen Zerobond hat einen Payoff von

$$\max \{X_m - P(n,m), 0\}$$

Daraus folgt, dass die Black-Scholes-Formel, abgebildet auf das Zinsstrukturmodell von Hull und White, verwendet werden kann. Dabei existiert ein Zinssatz r^*, welcher mit der garantierten Verzinsung sowie allen Überschüssen eines Lebensversicherungsunternehmens übereinstimmt. Dieser Zinssatz erfüllt die Bedingung $X_m = P^*(n,m)$. Dann lautet der Preis der m-ten Put-Option mit $m = n, n+1, ..., n+s$

$$p(m) = X_m \; P(0,n) \; \mathbf{\Phi}(-h_m + \sigma_{P,m}) - P(0,m)\mathbf{\Phi}(-h_m)$$

Dabei gelten für h_m und $\sigma_{P,m}$:

$$h_m = \frac{1}{\sigma_{P,m}} \; \ln\left(\frac{P(0,m)}{P(0,n) \; X_m}\right) + \frac{\sigma_{P,m}}{2}$$

$$\sigma_{P,m} = \frac{\sigma}{a}\left(1 - e^{-a(m-n)}\right)\sqrt{\frac{1-e^{-2an}}{2a}}$$

Der Wert der Abrufoption kann in einem letzten Schritt schnell ermittelt werden. Dazu werden alle europäischen Put-Optionen auf Zerobonds mit allen Auszahlungen aufsummiert. Für die Ausübung muss die versicherte Person bis zum Zeitpunkt n überlebt haben. Daher wird die entstandene Summe mit der n-jährigen Überlebenswahrscheinlichkeit ${}_np_x$ gewichtet.

Preis der Aufschuboption unter dem finanziellen Aspekt

$$\boxed{\mathbf{AUFSCHUB_{Fin}} = \; {}_{\mathbf{n}}\mathbf{p_x} \sum_{\mathbf{m=n}}^{\mathbf{n+s}} {}_{\mathbf{m-1}}\mathbf{p_x} \; \mathbf{q_{x+m-1}} \; \mathbf{D_m} \; \mathbf{p_m}}$$

Kapitel 4

Bewertung von Optionen in der Lebensversicherung unter dem biometrischen Aspekt

Bisher wurden Optionen betrachtet, die aus der Finanzwelt stammen und implizierte Optionen in Lebensversicherungsverträgen, die einen finanziellen Charakter besitzen. In diesem Kapitel wird sich ebenfalls mit Optionen aus der Lebensversicherungsbranche beschäftigt. Diese werden allerdings unter einem anderen Aspekt in Augenschein genommen. Es handelt sich dabei um Optionen, die einem biometrischen Charakter folgen, wobei auch eine bereits bekannte Option darunter zu finden sein wird.
Anfangs wird in der Einführung die Frage geklärt werden, was Biometrie bedeutet, um dann die biometrischen Optionen einzuführen. Weiterhin muss überdacht werden, wie diese Optionen zu bewerten sind, da die Überführung in die Finanzwelt und deren Modelle hier nicht anwendbar sind. Weiterhin werden ausgewählte Optionen zur Bewertung herangezogen.

4.1 Einführung von biometrischen Optionen in der Lebensversicherung

Nicht nur die Finanzoptionen können einen enormen Wert besitzen, sondern ebenso die Optionen mit einem biometrischen Charakter. Auch diese Optionen können bei ungünstigen Konstellationen eines Vertrages auffallende Kosten verursachen.
Bevor die Optionen mit biometrischen Charakter vorgestellt werden, soll geklärt werden, was Biometrie bedeutet. Dazu die folgende Definition.

Biometrie

> kommt aus der griechischen Sprache und setzt sich zusammen aus „Bio“, was mit „Leben“ übersetzt wird, und dem Wort „Metron“, welches gleichbedeutend mit „Maß“ ist.
> Im Allgemeinen befasst sich die Biometrie mit Messungen an Lebewesen.
> In der Personenversicherungsbranche wird die Biometrie als individuelles Risiko verstanden, was jede versicherte Person mit sich bringt.

In der Lebensversicherungsbranche gilt die Biometrie also als ein Risiko, das **biometrische Risiko**. Es ist das Risiko, was das Lebensversicherungsunternehmen trägt, wenn es solche Risiken für den Versicherungsnehmer absichert. Als wichtigste biometrische Risiken sind die folgenden zu nennen:

- Tod
- Langlebigkeit
- Berufsunfähigkeit
- Erwerbsunfähigkeit
- Pflegebedürftigkeit

Bevor Lebensversicherungsunternehmen Personen in ihr Versicherungskollektiv aufnehmen, wird eine Gesundheitsprüfung durchgeführt. Diese Maßnahme soll sicher stellen, dass kurz nach Vertragsabschluss bereits der Versicherungsfall eintritt. Das bedeutet, es werden Personen selektiert, die beispielsweise kurz vor der Berufsunfähigkeit stehen oder auch eine tödliche Krankheit haben.

Die in Lebensversicherungsverträgen implizierten Optionen enthalten bei der Ausübung ein erhöhtes biometrisches Risiko. Das heißt nicht, dass eine versicherte Person kränker wird, wenn sie eine der möglichen Optionen in Betracht zieht. Ein erhöhtes biometrisches Risiko besteht in der Sicht, dass die versicherte Person auf Grund ihrer Krankheit die Option wählt. Aber auch hier haben die Lebensversicherungsunternehmen einen Weg, um dieses Risiko einzuschränken. Übt ein Versicherungsnehmer eine Option aus, so kann

der Versicherungsvertrag auf aktuelle Rechnungsgrundlagen umgestellt werden. Das bedeutet, dass beispielsweise das aktuelle Alter der versicherten Person herangezogen wird. Des Weiteren sind auch alle im Bedingungswerk festgelegten Einschränkungen zur Ausübung der Option Maßnahmen, die ein höheres Risiko verhindern sollen.
Wie bereits bekannt ist, werden Optionen nicht in einen Lebensversicherungstarif einkalkuliert. Es gibt Optionen mit biometrischen Charakter, bei deren Ausübung eine pauschale Prämie vom Lebensversicherungsunternehmen verlangt wird. Allerdings haben Untersuchungen gezeigt, dass auch eine Pauschale unter gewissen Umständen nicht ausreichend ist, um die bei Optionsausübung entstehenden Kosten zu decken.

4.2 Biometrische Optionen

Um sich einen Überblick zu verschaffen, welche biometrischen Optionen am gängigsten sind und welche Besonderheiten sie besitzen, werden sie in diesem Abschnitt vorgestellt und erläutert. Dabei wird ein weiteres Mal mit der bedeutendsten Option begonnen.

Das Kapitalwahlrecht

Das bei aufgeschobenen Rentenversicherungen angebotene Kapitalwahlrecht wird an dieser Stelle noch einmal aufgeführt. Es wurde bereits im Kapitel 3.2[1] ausführlich beschrieben und unter dem finanziellen Aspekt bewertet. Doch das Kapitalwahlrecht, wie später noch ersichtlich wird, trägt ebenso ein hohes biometrisches Risiko.
Bei der Bewertung übernimmt das Kapitalwahlrecht eine besondere Rolle. Wie später noch gezeigt wird, ist das allgemeine Bewertungsprinzip hier nicht anwendbar.

Eine weitere wichtige und weit verbreitete Option ist die Nachversicherungsgarantie. Unter ihr versammeln sich weitere Optionen, die im Allgemeinen den gleichen Zweck dienen. Die Nachversicherungsgarantie bietet dem Versicherungsnehmer unter gewissen Voraussetzungen seinen Versicherungsschutz *ohne eine erneute Gesundheitsprüfung* zu erhöhen.
Sie ist in fast allen Arten von Lebensversicherungsverträgen enthalten. Daher werden die allgemein gültigen Ausprägungen ausführlich beschrieben, denn diese sind sich bei den verschiedenen Lebensversicherungstarifen sehr ähnlich.

Die Nachversicherungsgarantie unter objektiven Ereignissen

Diese Art der Nachversicherungsgarantie kann der Versicherungsnehmer ausüben, wenn ein objektives Ereignis eintritt. Das Lebensversicherungsunternehmen definiert diese in seinem Bedingungswerk. Die objektiven Ereignisse beziehen sich auf die versicherte Person. Einige Beispiele sind:

- Geburt oder Adoption eines Kindes,

[1] Auf die ausführliche Beschreibung des Kapitalwahlrechts soll hier verzichtet werden. Als Verweis gelte Kapitel 3.2, wo die Option bereits behandelt worden ist.

- Heirat,
- Volljährigkeit,
- Aufnahme einer selbstständigen Tätigkeit,
- Einkommenserhöhung im Rahmen, wie es das Bedingungswerk festlegt,
- Tod des mit verdienenden Ehegatten.

Weiterhin im Bedingungswerk definiert ein jedes Lebensversicherungsunternehmen bestimmte Bedingungen zur Ausübung der Option, wie zum Beispiel Fristen. Ein anderes Beispiel ist die Einschränkung der Ausübungszeitpunkte. Meist wird in den ersten zehn bis zwölf Versicherungsjahren die Nachversicherungsgarantie erlaubt. Zu einem späteren Zeitpunkt jedoch nicht mehr. Weiterhin existieren Höchstgrenzen, mit welchem Alter eine versicherte Person ausüben darf oder bis zu welchem Wert die Erhöhung vorgenommen werden kann.

Die Nachversicherungsgarantie bei Reduzierung der Überschussbeteiligung

Eine weitere Möglichkeit der Nachversicherungsgarantie besteht für den Versicherungsnehmer, wenn die Überschussbeteiligung vom Lebensversicherungsunternehmen reduziert wird. Diese Option tritt bisher nur bei Pflegerentenversicherungen auf.
Der Versicherungsnehmer wird über die Reduzierung in Kenntnis gesetzt und kann dann innerhalb einer einzuhaltenden Frist die Option ausüben. Die Erhöhung der Pflegerente begrenzt sich auf den ursprünglichen Wert, der bei der Reduzierung der Überschussbeteiligung verloren wurde. Der aufgefüllte Teil der Pflegerente wird dann ebenso garantiert.
Die Option wird im weiteren Verlauf keine besondere Rolle mehr spielen, da sie bei Ausübung eine Prämienerhöhung für den aufgefüllten Teil zur Folge hat. Weiterhin hat die Reduzierung der Überschussbeteiligung meist keine sehr große Auswirkungen auf die Pflegerente, so dass nur ein kleiner Teil aufgefüllt werden muss. Die versicherte Person wird außerdem auf aktuelle Rechnungsgrundlagen umgestellt. Somit kann vorerst angenommen werden, dass der Optionspreis abgegolten wird.

Die Dynamik

Die Dynamik ist eine planmäßige Erhöhung der Beiträge und der Versicherungsleistungen. Die Erhöhungen werden als Prozentsatz des zu zahlenden Beitrags oder der Versicherungsleistungen meist jährlich zu Beginn eines jeden Versicherungsjahres vollzogen. Somit ist die Dynamik eine dauerhafte Art der Nachversicherungsgarantie.
Ist bei Vertragsabschluss eine Dynamik mit eingeschlossen, so werden die Erhöhung automatisch ausgeführt, so lang der Versicherungsnehmer noch Beiträge zu zahlen hat. Entspricht die Länge der Beitragszahlungsdauer der Vertragslaufzeit, so ist es in vielen Lebensversicherungsunternehmen üblich, dass während der letzten Versicherungsjahre oder ab einem im Bedingungswerk festgelegten Höchstalter die Dynamik aussetzt.
Der Versicherungsnehmer hat aber auch das Recht die Dynamik abzulehnen. Tut er dies mehr als zweimal hintereinander, so wird die Dynamik aus seiner Lebensversicherung ausgeschlossen. Diese Regelung für das Widerspruchsrecht ist weit verbreitet.

Für jede Art der Nachversicherungsgarantie in jedem Lebensversicherungstarif können weitere Bedingungen und Fristen gelten.

Eine biometrische Option, die keine Erhöhungen der Leistungen nach sich zieht, ist die Verlängerungsoption. Diese soll als nächstes vorgestellt werden.

Die Verlängerungsoption

Die Möglichkeit der Verlängerungsoption ist üblicherweise in Berufsunfähigkeitsversicherungen[2] enthalten. Sie bietet eine Verlängerung der Laufzeit und somit einen längeren Versicherungsschutz ohne eine erneute Gesundheitsprüfung.
Allerdings muss sie bei Vertragsabschluss vereinbart werden, um im späteren Verlauf des Versicherungsvertrages ausgeübt werden zu können. In der Regel wird eine Prämie für die Verlängerungsoption verlangt.
Die Verlängerung geht nicht über ein vom Lebensversicherungsunternehmen festgelegtes Höchstalter hinaus und überschreitet nicht die zu

[2] Ist von Berufsunfähigkeitsversicherungen die Rede, so sind die eigenständigen Versicherungen wie auch die Zusatzversicherungen, die einen Berufsunfähigkeitsschutz bieten, gemeint.

Vertragsbeginn festgelegte Leistungsdauer. Die Ausübung dieser Option führt meist zu einer Beitragserhöhung.
Weitere Bedingungen und Fristen können gelten.

Die letzte biometrische Option, die in dieser Arbeit eingeführt werden soll, ist die Möglichkeit eine Risikolebensversicherung in eine kapitalbildende Lebensversicherung umzutauschen. Diese Option wird mit Umtauschoption bezeichnet.

Die Umtauschoption

Hat ein Versicherungsnehmer eine Risikolebensversicherung abgeschlossen, in der diese Option impliziert ist, so hat er das Recht innerhalb der ersten Versicherungsjahre (meist 10 Jahre) seine Risikolebensversicherung in eine kapitalbildende Lebensversicherung ohne eine erneute Gesundheitsprüfung umzutauschen. Dabei ist eine Verlängerung der Vertragslaufzeit für die kapitalbildende Lebensversicherung möglich.
Die Versicherungsleistung kann in der Regel nicht erhöht aber vermindert werden. Der Umtausch gilt nur für dieselbe versicherte Person.
Weitere Bedingungen und Fristen können gelten.

Im Allgemeinen bringen biometrische Optionen eine Erhöhung der Leistungen oder eine Verlängerung der Laufzeit mit sich. Wobei der Faktor der ausbleibenden Gesundheitsprüfung das Risiko enthält, was die biometrischen Optionen an Kosten verursachen können.

4.3 Allgemeine Bezeichnungen zu Lebensversicherungsverträgen

Im Kapitel 3.3 wurden bereits die aufgeschobene Rentenversicherung und die kapitalbildende Lebensversicherung vorgestellt. In diesem Kapitel ist es notwendig die Risikolebensversicherung einzuführen.
Zuvor soll der bereits verwendete Begriff der **Rechnungsgrundlagen** in der Lebensversicherung erklärt werden. Dabei wird wie folgt unterschieden. Die **Rechnungsgrundlagen 1. Ordnung** werden bei der Beitragskalkulation verwendet. Für ein Lebensversicherungsunternehmen ist es gesetzlich vorgegeben, dass diese vorsichtig gewählt werden, um die Beiträge nicht zu gering zu kalkulieren.
Beispielsweise wird der rechnungsmäßige Zinssatz[3] von der Bundesanstalt für Finanzdienstleistungsaufsicht (BaFin) festgelegt. Der aktuelle rechnungsmäßige Zinssatz liegt seit dem Jahr 2007 bei $2,25\%$. Eine weitere Rechnungsgrundlage sind die Sterbetafeln. Diese werden von der Deutschen Aktuarsvereinigung (DAV) geliefert. Allerdings ist ein Lebensversicherungsunternehmen nicht verpflichtet, die Sterbetafeln der DAV zur Kalkulation einzusetzen. Es gibt auch die Möglichkeit, eine unternehmenseigene Sterbetafel zu erstellen. Dazu muss das Lebensversicherungsunternehmen einen genügend großen Bestand haben, um diese realistisch zu konstruieren. Die Vorgaben vom BaFin und der DAV sind notwendig, da in Deutschland die dauernde Erfüllbarkeit der Versicherungsverträge an erster Stelle steht.

Die **Rechnungsgrundlagen 2. Ordnung** entsprechen den tatsächlich erwarteten Rechnungsgrundlagen. Sie werden aus den Rechnungsgrundlagen 3. Ordnung, also den tatsächlich eingetretenen, abgeleitet. Rechnungsgrundlagen 2. Ordnung stellen eine Aussage für die Zukunft dar, die beispielsweise in Bezug zur aktuell gültigen Sterbetafel der DAV gesetzt wird. Die Rechnungsgrundlagen 2. Ordnung werden zum Beispiel für den Finanzierbarkeitsnachweis[4] verwendet.

Die folgende Aufzählung nennt die wichtigsten Rechnungsgrundlagen:

[3] Der rechnungsmäßige Zinssatz entspricht der garantierten Verzinsung. Er wird auch Höchstrechnungszinssatz genannt.

[4] Als Finanzierbarkeitsnachweis wird die Rechtfertigung der zukünftigen Überschussbeteiligung bezeichnet. Er bietet dem Versicherungsnehmer den Schutz, dass das Lebensversicherungsunternehmen nicht zu hohe Angaben machen kann, um die Kunden zu locken.

- Zins
- Sterbewahrscheinlichkeit für Todesfallversicherungen
- Sterbewahrscheinlichkeit für Rentenversicherungen
- Invalidisierungswahrscheinlichkeit
- Kostensätze

Es wird nun die Risikolebensversicherung vorgestellt.

4.3.1 Die Risikolebensversicherung

Die Risikolebensversicherung wird auch temporäre Todesfallversicherung genannt. Sie sichert nur den Todesfall ab. Wenn die versicherte Person innerhalb der Vertragslaufzeit von n Jahren stirbt, zahlt das Lebensversicherungsunternehmen die Todesfallleistung D_k zum Zeitpunkt k aus. Erlebt die versicherte Person das Vertragsende, so wird keine Leistung fällig. Die Todesfallleistung wird als konstant angesehen. Sie enthält bereits die garantierten Zinsen und alle Überschüsse.

Eine Risikolebensversicherung ist hauptsächlich vom Alter der versicherten Person und von der Vertragslaufzeit abhängig. Denn da nur der Todesfall versichert wird, sind die Sterbewahrscheinlichkeiten die wichtigste Größe bei der Ermittlung des Leistungsbarwertes:

$$|_n A_x = \sum_{k=0}^{n-1} {}_k p_x \ q_{x+k} \ v^{k+1} \ D_k$$

Dabei gelten weiterhin die nachstehenden Notation.

x	–	Alter der versicherten Person
n	–	Vertragslaufzeit
t	–	Beitragszahlungsdauer
${}_n p_x$	–	n-jährige Überlebenswahrscheinlichkeit eines x-jährigen
q_x	–	Sterbewahrscheinlichkeit eines x-jährigen
v^n	–	Diskontierungsfaktor für n Jahre
D_k	–	Todesfallleistung

Mit diesen Bezeichnungen wird die Risikolebensversicherung in der Abbildung 4.1 veranschaulicht.

x $\qquad\qquad\qquad\qquad\quad$ t

$0 \quad 1 \quad \ldots \quad n-1 \quad n$

|——|————————|——|—————>

$D_0 \quad \ldots \quad D_n \quad D_{n+1}$

Abbildung 4.1: *Risikolebensversicherung*

Die jährlich vorschüssigen Beitragszahlungen sollen weiterhin über die gesamte Vertragslaufzeit geleistet werden. Der letzte Beitrag wird zum Zeitpunkt $n-1$ gezahlt. Es gilt $n = t$.

4.4 Allgemeines Bewertungsprinzip für biometrische Optionen

Da biometrische Optionen zur Bewertung nicht in Finanzderivate überführbar sind und damit auch die Modelle aus der Finanzwelt nicht zur Anwendung kommen können, muss ein neuer Ansatz gefunden werden.
Dazu werden im ersten Schritt die Gemeinsamkeiten der biometrischen Optionen zusammen getragen.

- Die Option wird ohne eine erneute Gesundheitsprüfung ausgeübt.
- Der Versicherungsvertrag wird auf aktuelle Rechnungsgrundlagen umgestellt.
- Bei den Optionen wird entweder die Vertragslaufzeit verlängert oder die Leistungen erhöht.
- Alle Optionen sind nur unter bestimmten Bedingungen ausführbar.

Die Bedingungen, unter der eine Option ausgeübt werden darf, lassen erkennen, dass eine Option nicht für jede versicherte Person zu jedem beliebigen Zeitpunkt mit beliebigen Ausprägungen ausführbar ist. Diese Einschränkungen werden vom Lebensversicherungsunternehmen festgelegt, um zu verhindern, dass das Risiko zu stark wächst. Dies trifft ebenfalls zu, wenn der Versicherungsvertrag bei Optionsausübung auf aktuelle Rechnungsgrundlagen umgestellt wird. Dieses Thema wird zu einem späteren Zeitpunkt noch genauer aufgegriffen und genauer diskutiert.

Die wichtigsten Gemeinsamkeiten ist die Verlängerung der Vertragslaufzeit oder die Erhöhung der Leistungen ohne eine erneute Gesundheitsprüfung. An Hand dieser Punkte muss ein Ansatz zur Bewertung der biometrischen Optionen gefunden werden. Nur aus der Verlängerung des Vertrages oder Erhöhung der Leistungen kann keine Bewertungsmethode geschlossen werden. Aber es ist offensichtlich, dass dieser Aspekt mit einbezogen werden muss. Dem zur Folge Wird ein Ansatz aus der Gemeinsamkeit gezogen, die besagt, dass die biometrischen Optionen ohne eine erneute Gesundheitsprüfung ausführbar sind.

Das Kapitalwahlrecht weist diese Gemeinsamkeit nicht auf. Daher spielt es eine gesonderte Rolle. Für das Kapitalwahlrecht muss ein anderer Ansatz gefunden werden, wie die Bewertung unter dem biometrischen Aspekt durchgeführt werden kann. Aus diesem Grund wird diese Option auch erst in Kapitel 4.5.3 genauer untersucht und ein Ansatz zur Bewertung hergeleitet.

4.4.1 Die Gesundheitsprüfung

Hier soll sich nun weiter auf den Gesichtspunkt „ohne erneute Gesundheitsprüfung“ konzentriert werden. Denn die ersparte Gesundheitsprüfung entspricht der eigentlichen Option. Wie bereits festgestellt, wird ein Versicherungsvertrag bei Optionsausübung mit den aktuellen Rechnungsgrundlagen neu berechnet. Dabei ist die Verlängerung der Vertragslaufzeit beziehungsweise die Erhöhung der Leistungen bereits enthalten und somit in den neuen zu zahlenden Beitrag einkalkuliert. Mit anderen Worten entspricht die Ausübung einer biometrischen Option einem Neuabschluss ohne eine Gesundheitsprüfung. Daraus folgt, dass der Wert einer biometrischen Option mit dem Wert der Gesundheitsprüfung übereinstimmt.

Doch wie wird die Gesundheitsprüfung durchgeführt und wie beeinflusst sie die Werte eines Versicherungsvertrags.
Die Gesundheitsprüfung wird an der versicherten Person zu Vertragsbeginn durchgeführt. Sie gibt dem Lebensversicherungsunternehmen die Chance, den Gesundheitszustand der versicherten Person korrekt einzuschätzen. Die Gesundheitsprüfung gehört zur vorvertraglichen Anzeigepflicht und ist im §19 des Versicherungsvertragsgesetz (VVG) geregelt.
Zur Gesundheitsprüfung wird kurz ein Beispiel illustriert.

Ein Neukunde möchte eine Risikolebensversicherung abschließen. Das Lebensversicherungsunternehmen lässt der potentiellen versicherten Person die Gesundheitsfragen beantworten. Danach kann entschieden werden, ob ein Risikozuschlag erhoben werden, wenn der Neukunde bereits Vorerkrankungen aufweist. Das Lebensversicherungsunternehmen hat ebenso das Recht die Person abzulehnen.
Wird nach Vertragsabschluss bekannt, dass die versicherte Person die Gesundheitsfragen nicht wahrheitsgemäß beantwortet hat, so kann das Lebensversicherungsunternehmen von der Risikolebensversicherung zurücktreten.
Weiterhin hat das Lebensversicherungsunternehmen das Recht, beim Hausarzt des Neukunden medizinische Fragen zu stellen oder einen eigenen Arzt für eine Untersuchung zu bestimmen.

4.4.2 Die Anfangsselektion und der Selektionsfaktor

Der Ablauf einer Gesundheitsprüfung ist geklärt worden. Aber was bewirkt die Gesundheitsprüfung?

Dazu werden die Rechnungsgrundlagen einer Risikolebensversicherung in Augenschein genommen. Wie bereits gesagt wurde, hängt diese Versicherung hauptsächlich vom Alter und der Laufzeit ab. Der Grund dafür ist der Einfluss der Sterbewahrscheinlichkeiten. Schließt ein Neukunde nach der Gesundheitsprüfung eine Risikolebensversicherung ab, so ist das Risiko, dass er in den ersten Versicherungsjahren verstirbt, eher gering. Somit werden in die Sterbewahrscheinlichkeiten in den ersten Versicherungsjahren geringer ausfallen. Sie werden mit einem prozentualen Abzug versehen. Dadurch wird eine sogenannte **Anfangsselektion** vorgenommen. Diese Anfangsselektion bewirkt also, dass für einen Neukunden in der Anfangsphase seiner Risikolebensversicherung mit geringeren Sterbewahrscheinlichkeiten kalkuliert wird. Wird eine biometrische Option ausgeübt, so werden die Beiträge für die versicherte Person neu ermittelt. Dabei wird die Anfangsselektion nicht beachtet, da auch keine Gesundheitsprüfung vorgenommen wurde. Also wird mit den Sterbewahrscheinlichkeiten ohne einbezogene Anfangsselektion gerechnet.
Um den Wert der Gesundheitsprüfung, und damit den Wert der Option, zu bestimmen, müssen die Sterbetafeln mit und ohne enthaltener Anfangsselektion näher beleuchtet werden.

Die Anfangsselektion umfasst in der Regel die ersten fünf Versicherungsjahre und wird als Prozentsatz der Sterbewahrscheinlichkeit angegeben. Ein Beispiel für eine versicherte Person im Alter von 35 Jahren wird in Tabelle 4.1 gezeigt:

x	q_x^{oSel}	s_m in %	q_x^{mSel}
35	$0,001747$	$0,75$	$0,001310$
36	$0,001869$	$0,80$	$0,001495$
37	$0,002007$	$0,85$	$0,001706$
38	$0,002167$	$0,90$	$0,001950$
39	$0,002354$	$0,95$	$0,002236$
40	$0,002569$	$1,00$	$0,002569$

Tabelle 4.1: *Beispiel: Sterbewahrscheinlichkeiten mit Selektionsfaktoren*

Die Sterbewahrscheinlichkeiten q_x^{oSel} sind aus der Sterbetafel DAVSt1994T[5] für das Alter 35 bis 40 einer männlichen Person entnommen worden. Mit s_m werden die Selektionsfaktoren mit $m = 1, ..., 5$ bezeichnet. Die Selelektionsfaktoren werden meist vom Rückversicherer geliefert, wenn der eigene Bestand des Lebensversicherungsunternehmens nicht groß genug ist, um solche Faktoren zu berechnen. Dabei geht man von einem anfänglichen Niveau aus und ermittelt die Selektionsfaktoren der folgenden vier Jahre so, dass im sechsten Jahr der Selektionsfaktor 1 beträgt. Hier ist ein anfängliches Niveau von 75% gegeben. Bis zum sechsten Jahr ist der Selektionsfaktor auf 1 normiert. Durch die Multiplikation der Sterbewahrscheinlichkeiten q_x^{oSel} mit dem jeweiligen Selektionsfaktor s_m entstehen die Sterbewahrscheinlichkeiten q_x^{mSel} mit enthaltener Anfangsselektion.

4.4.3 Der Leistungsbarwert und die Kommutationszahlen

Im nächsten Schritt muss überlegt werden, wie mit Hilfe der nun hergeleiteten Anfangsselektion die Bewertung der biometrischen Optionen vollzogen werden kann.
Dazu wird der Leistungsbarwert einer Lebensversicherung herangezogen. Ein **Leistungsbarwert** entspricht dem Erwartungswert der Leistungen innerhalb eines Lebensversicherungsvertrags. Bisher ist die Darstellung des Leistungsbarwerts in einer Summe bekannt. An dieser Stelle wird der Leistungsbarwert, beschrieben durch Kommutationszahlen, eingeführt werden. **Kommutationszahlen** dienen der Vereinfachung von Barwertberechnungen. Sie haben ihren Ursprung in der deterministischen Auffassung und sind in der Versicherungsmathematik weit verbreitet. Die ersten drei Arten von Kommutationszahlen werden für Erlebensfalltarife verwendet, während die darauf folgenden für Todesfalltarife geeignet sind. Die erste Kommutationszahl entspricht der diskontierten Anzahl der Lebenden des Alters x und wird mit D_x bezeichnet. Es gilt

$$D_x = l_x \, v^x$$

mit der Anzahl der x-jährigen Lebenden l_x. Dann ist N_x die Summe der diskontierten Anzahl der x-jährigen Lebenden mit

[5] DAVSt1994T ist die Sterbetafel von der Deutschen Aktuarsvereinigung für Todesfallversicherungen aus dem 1994.

$$N_x = \sum_{k=0}^{\omega-x} D_{x+k}$$

und S_x die doppelte Summe der diskontierten Anzahl der Lebenden des Alters x mit

$$S_x = \sum_{k=0}^{\omega-x} N_{x+k}$$

Mit Hilfe der eingeführten Kommutationszahlen kann die aufgeschobene Rentenversicherung nun wie folgt berechnet werden:

$$\begin{aligned} {}_{n|}\ddot{a}_x &= \sum_{k=0}^{\omega-x-n} {}_{k+n}p_x \;\; v^{n+k} = \sum_{k=0}^{\omega-x-n} \frac{l_{x+k}}{l_x} \; v^{n+k} = \sum_{k=0}^{\omega-x-n} \frac{l_{x+k} \; v^{x+n+k}}{l_x \; v^x} \\ &= \frac{N_{x+n}}{D_x} \end{aligned}$$

Für Todesfalltarife gelten entsprechend die nachstehenden Kommutationszahlen C_x, M_x und R_x. Mit der Anzahl der x-jährigen Verstorbenen d_x können die Kommutationszahlen für Todesfalltarif wie nachstehend definiert werden.

$$C_x = d_x \; v^{x+1}$$

ist die diskontierte Anzahl der x-jährigen Verstorbenen. Dann entspricht die Summe der diskontierten Anzahl der x-jährigen Verstorbenen

$$M_x = \sum_{k=0}^{\omega-x} C_{x+k}$$

und die doppelte Summe der diskontierten Anzahl der x-jährigen Verstorbenen

$$R_x = \sum_{k=0}^{\omega-x} M_{x+k}$$

Mit den Kommutationszahlen kann nun auch eine Risikolebensversicherung auf dem gleichen Weg, wie bei der aufgeschobenen Rentenversicherung, in der Form geschrieben werden.

$$|_{n}A_x = \frac{M_x - M_{x+n}}{D_x}$$

Auch die Kapitalbildende Lebensversicherung lässt sich durch die Kommutationszahlen darstellen:

$$A_{x,\overline{n}|} = \frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{D_x}$$

Mit dem nun bekannten Werkzeug wird der Ansatz der Bewertung von biometrischen Optionen weiter verfolgt.

4.4.4 Die Differenz aus Leistungsbarwerten

Die biometrischen Optionen wurden vorgestellt und erläutert. Es wurden Gemeinsamkeiten festgestellt und die Wichtigste sondiert. Der Wert der Option wurde gleichgesetzt mit dem Wert der Gesundheitsprüfung. Um den Letzteren ermitteln zu können, wurde die Anfangsselektion und der Selektionsfaktor eingeführt. Weiterhin wurde eine neue Darstellung für Leistungsbarwerte mittels Kommutationszahlen gefunden. An dieser Stelle kann das allgemeine Bewertungsprinzip eröffnet werden.

Im ersten Schritt wird dazu die Darstellung der Leistungsbarwerte mittels Kommutationszahlen mit den Sterbewahrscheinlichkeiten mit und ohne enthaltener Anfangsselektion zusammengeführt. Auf den ersten Blick ist es nicht ersichtlich, aber die Kommutationszahlen werden über die Sterbewahrscheinlichkeiten ermittelt. Die folgende Aufzählung von Formeln zeigt die rekursive Berechnung der Kommutationszahlen für Erlebensfalltarife.

$$D_x = D_{x-1}\ (1 - q_{x-1})\, v \quad \text{mit } \mathrm{D}_0 = l_0$$

$$N_x = D_x + N_{x+1} \quad \text{mit } \mathrm{N}_\omega = D_\omega$$

$$S_x = N_x + S_{x+1} \quad \text{mit } \mathrm{S}_\omega = N_\omega$$

Die Kommutationszahlen für Todesfalltarife können zurückgeführt werden auf die Kommutationszahlen D_x, N_x und S_x. Für die diskontierte Anzahl der x-jährigen Verstorbenen gilt

$$C_x = d_x\ v^{x+1} = (l_x - l_{x+1})\ \ v^{x+1} = l_x\ v^{x+1} - l_{x+1}\ v^{x+1}$$

$$= v\ D_x - D_{x+1}$$

Dann trifft für M_x und R_x mit $d = 1 - v$ das Folgende zu

$$M_x = D_x - dN_x$$

$$R_x = N_x - dS_x$$

Die nun bereit gestellten Kommutationszahlen stehen in Abhängigkeit zu den Sterbewahrscheinlichkeiten. Also können die benötigten Kommutationszahlen für einen Leistungsbarwert einer Lebensversicherung jeweils mit den Sterbewahrscheinlichkeiten q_x^{oSel} und q_x^{mSel} berechnet werden.
Die Bezeichnungen der Leistungsbarwerte wird an dem Beispiel einer Risikolebensversicherung illustriert:

$$|_n A_x^{oSel} = \frac{M_x^{oSel} - M_{x+n}^{oSel}}{D_x^{oSel}} \qquad - \text{ ohne Gesundheitsprüfung}$$

$$|_n A_x^{mSel} = \frac{M_x^{mSel} - M_{x+n}^{mSel}}{D_x^{mSel}} \qquad - \text{ mit Gesundheitsprüfung}$$

Um den Wert der Gesundheitsprüfung ermitteln zu können, muss eine Differenz der beiden Leistungsbarwerte gebildet werden. Das bedeutet, der Leistungsbarwert, der keine Gesundheitsprüfung beinhaltet, wird vom Leistungsbarwert mit Gesundheitsprüfung abgezogen.

$$|_n A_x^{mSel} - |_n A_x^{oSel} \quad = \text{ Wert der Gesundheitsprüfung}$$

Dabei ergibt sich ein negatives Ergebnis für die Differenz. Das lässt sich dadurch erklären, dass der Leistungsbarwert mit Anfangsselektion geringer sein muss als der ohne Anfangsselektion, da auch mit geringeren Sterbewahrscheinlichkeiten gerechnet wird. Daher wird mit der betragsmäßigen Differenz fortgefahren.

Zu Beginn dieses Abschnitts wurde festgestellt, dass der Wert einer biometrischen Option gleich dem Wert der Gesundheitsprüfung entspricht. Ganz so einfach kann die Betrachtung jedoch nicht durchgeführt werden. Das Ergebnis der Differenz ist noch nicht endgültig.
Hat die versicherte Person zu einem Zeitpunkt s innerhalb ihrer Vertragslaufzeit vor, eine Option auszuüben, so muss sie diesen Zeitpunkt erleben. Weiterhin ist es grundlegend, den Wert einer Option zu Vertragsbeginn zu kennen. Daher muss die Differenz zu diesem Zeitpunkt diskontiert werden.

Gewichtet mit der Überlebenswahrscheinlichkeit und diskontiert, ergibt sich der Wert für die Ausübung zum Zeitpunkt s für eine biometrische Option in einer Risikolebensversicherung:

$$\boxed{{}_sp_x \ v^s \ \left(\left| \ |_{n-s}A_{x+s}^{mSel} - |_{n-s}A_{x+s}^{oSel} \ \right| \right)}$$

Nun muss unterschieden werden, ob die biometrische Option eine Verlängerung der Laufzeit bewirkt oder eine Erhöhung der Leistungen.
Im Falle der verlängerten Laufzeit wird $n - s$ mit der Verlängerung um m Jahre addiert. Weiterhin wird mit der Versicherungssumme multipliziert und der prozentuale Anteil an der Versicherungssumme ermittelt.
Handelt es sich um eine erhöhte Todesfallleistung, so ist es notwendig nur mit der Erhöhung zu multiplizieren. Die ursprüngliche Versicherungssumme wird hier nicht herangezogen, da es sich bei einer solchen Option um einen Neuabschluss mit einer Versicherungssumme in Höhe der Aufstockung der Leistung handelt. Wird nun ebenfalls der prozentuale Anteil gebildet, so wird dies von der gesamten Versicherungssumme abgeleitet, also von der ursprünglichen Leistung addiert mit der Erhöhung.

Ein letzter Schritt muss noch getan werden, um einen realistischen Wert für eine biometrische Option zu erhalten. Es stellt sich die Frage:

„Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine versicherte Person überhaupt eine Option ausübt?“

Diese Frage trägt ebenso bei den Finanzoptionen eine Relevanz. Da die Ermittlung von Ausübungswahrscheinlichkeiten ein echtes Problem darstellen, wird es in Kapitel 5 aufgegriffen und ausführlich diskutiert.

Hier kann erst einmal mit dem bisherigen Resultat zur Bewertung einzelner biometrischer Optionen übergegangen werden.

4.5 Bewertung von biometrischen Optionen

Die bedeutungsvollste Option ist das Kapitalwahlrecht. Da dieses nicht mittels des allgemeinen Bewertungsprinzips zu bewerten ist, wird sich der biometrische Aspekt dieser Option erst später angenommen.
Zunächst soll das allgemeine Bewertungsprinzip angewendet werden. Begonnen wird mit der Nachversicherungsgarantie, wobei zwei Arten der Option betrachtet werden. Bei Umtauschoption einer Risikolebensversicherung in eine kapitalbildende Lebensversicherung kommt ebenfalls das allgemeine Bewertungsprinzip zum Einsatz.

4.5.1 Bewertung der Nachversicherungsgarantie

Die Nachversicherungsgarantie unter objektiven Ereignissen und die Dynamik werden hier unter der vorgestellten Bewertungsmethode in Augenschein genommen. Die beiden Arten der Nachversicherungsgarantie werden in fast allen Lebensversicherungen angeboten. Das Verfahren zur Bewertung bei unterschiedlichen Lebensversicherungen zeigt keine großen Abweichungen. Daher wird auf die Einführung neuer Tarife verzichtet und die Bewertung an Hand der bisher bekannten Tarifen durchgeführt.

4.5.1.1 Die Nachversicherungsgarantie unter objektiven Ereignissen

Diese Nachversicherungsgarantie kann von der versicherten Person ausgeübt werden, wenn eines der Ereignisse eintritt. Die gängigsten Ereignisse wurden aufgezählt. Aber es gibt durchaus noch eine Vielzahl von anderen Geschehnissen, welches die Ausübung der Option erlaubt. Diese sind im Bedingungswerk des Lebensversicherungsunternehmens verankert.
Die Nachversicherungsgarantie bietet bei Eintritt eines der Ereignisse eine Erhöhung der Versicherungsleistungen an. Diese biometrische Option wird ohne eine erneute Gesundheitsprüfung ausgeübt. Damit kann hier das allgemeine Bewertungsprinzip angewendet werden. Da diese Art der Nachversicherungsgarantie eher selten bei aufgeschobenen Rentenversicherungen enthalten ist, wird das allgemeine Bewertungsprinzip an der Risikolebensversicherung und an der kapitalbildenden Lebensversicherung präsentiert.

4.5.1.1.1 Für die Risikolebensversicherung

Die Bezeichnungen für eine Risikolebensversicherung werden aus dem Abschnitt 4.3.1 übernommen. Wird die Option zu dem Ausübungszeitpunkt s von der versicherten Person gewählt, so erhöht sich die Todesfallleistung um E_k. Dann ergibt sich eine neue Versicherungssumme $N_k = D_k + E_k$ mit $k = s, ..., n-1$. Die folgende Abbildung 4.2 stellt eine Risikolebensversicherung mit der ausgeübten Nachversicherungsgarantie unter objektiven Ereignissen dar.

$x \qquad\qquad\qquad\qquad t$

$0 \quad 1 \quad \ldots \quad s \quad s+1 \quad \ldots \quad n-1 \quad n$

|——|————————|——|————————|——|————>

$\quad D_0 \quad \ldots \quad D_{s-1} \quad N_s \quad \ldots \quad N_{n-2} \quad N_{n-1}$

Abbildung 4.2: *Risikolebensversicherung mit Ausübung der Nachversicherungsgarantie*

Der Leistungsbarwert der Risikolebensversicherung nach der Erhöhung der Todesfallleistung besitzt die folgende Form

$$|_{n-s}A_{x+s} = \sum_{k=0}^{n-s-1} {}_kp_{x+s}\; q_{x+s+k}\; v^{k+1}\; N_k = \frac{M_{x+s} - M_{x+n}}{D_{x+s}}\; N_k$$

Die Ausübung der Nachversicherungsgarantie unter objektiven Ereignissen zählt als ein Neuabschluss zum Zeitpunkt s mit einer Todesfallleistung von der Erhöhung E_k. Der ursprüngliche Vertrag bleibt bestehen. Die Differenz aus einer Beitragszahlung nach der Ausübung und der dann gültigen Beitragshöhe entspricht der Prämie für den Neuabschluss. Die Todesfallleistungen D_k, E_k und somit auch N_k sind zu jedem Zeitpunkt konstant. Die Leistungsbarwerte, die mit und ohne Selektionsfaktoren berechnet werden, lauten

$$|_{n-s}A^{oSel}_{x+s} = \frac{M^{oSel}_{x+s} - M^{oSel}_{x+n}}{D^{oSel}_{x+s}}\; E_k$$

$$|_{n-s}A^{mSel}_{x+s} = \frac{M^{mSel}_{x+s} - M^{mSel}_{x+n}}{D^{mSel}_{x+s}}\; E_k$$

Damit kann nun die Differenz der Leistungsbarwerte gebildet und ihre Gewichtung vorgenommen werden.

Preis der Nachversicherungsgarantie unter objektiven Ereignissen bei einer Risikolebensversicherung

$$\boxed{\mathbf{NVG^{Risiko}_{bio}} = \ {}_{\mathbf{s}}\mathbf{p_x}\ \mathbf{v^s}\ \left(\ \left|\ |_{\mathbf{n-s}}\mathbf{A^{mSel}_{x+s}} - |_{\mathbf{n-s}}\mathbf{A^{oSel}_{x+s}}\ \right|\ \right)}$$

4.5.1.1.2 Für die kapitalbildende Lebensversicherung

Aus dem Kapitel 3.3.2 wird die Notation der kapitalbildenden Lebensversicherung beibehalten. Bei Ausübung der Option zum Zeitpunkt s erhöht sich die Erlebensfallleistung sowie auch die Todesfallleistung. Die folgenden Bezeichnungen sollen dann gelten:

S_n	–	ursprüngliche Erlebensfallleistung
T_n	–	Erhöhung der Erlebensfallleistung
$U_n = S_n + T_n$	–	neue Erlebensfallleistung
D_k	–	ursprüngliche Todesfallleistung
E_k	–	Erhöhung der Todesfallleistung
$N_k = D_k + E_k$	–	neue Todesfallleistung

mit $k = s, ..., n-1$ Um zu gewährleisten, dass zu jedem Zeitpunkt die Leistungen immer die gleiche Höhe besitzen, müssen die Bedingungen $S_n = D_k$, $T_n = E_k$ und somit auch $U_n = N_k$ erfüllt sein.

Auch hier entspricht die Ausübung der Nachversicherungsgarantie unter objektiven Ereignissen einen Neuabschluss in Höhe der Leistungen T_n und D_k zum Zeitpunkt s.
Der Leistungsbarwert eines Neuabschlusses mit durchgeführter Gesundheitsprüfung hat dann den Wert:

$$A^{mSel}_{x+s,\overline{n-s}|} = \frac{M^{mSel}_{x+s} - M^{mSel}_{x+n}}{D^{mSel}_{x+s}}\ E_k + \frac{D^{mSel}_{x+n}}{D^{mSel}_{x+s}}\ T_n$$

Ein Neuabschluss ohne Gesundheitsprüfung stimmt mit einer Optionsausübung überein. In diesem Fall lautet der Leistungsbarwert

$$A^{oSel}_{x+s,\overline{n-s}|} = \frac{M^{oSel}_{x+s} - M^{oSel}_{x+n}}{D^{oSel}_{x+s}}\, E_k + \frac{D^{oSel}_{x+n}}{D^{oSel}_{x+s}}\, T_n$$

Die Differenz der Leistungsbarwerte und ihre Gewichtung bringt das Resultat:

Preis der Nachversicherungsgarantie unter objektiven Ereignissen bei einer kapitalbildenden Lebensversicherung

$$\boxed{\mathbf{NVG^{KLV}_{bio}} = {}_{\mathbf{s}}\mathbf{p_x}\ \mathbf{v^s}\ \left(\left| \mathbf{A^{mSel}_{x+s,\overline{n-s}|}} - \mathbf{A^{oSel}_{x+s,\overline{n-s}|}} \right| \right)}$$

Die bisherigen Ergebnisse für die Risikolebensversicherung und die kapitalbildende Lebensversicherung müsste, wie schon erwähnt, ein weiteres Gewicht tragen. Die Ausübungswahrscheinlichkeiten sind allerdings problematisch zu ermitteln. Insbesondere bei dieser biometrischen Option kann eine realistische Ausübungswahrscheinlichkeit ohne genaue Daten nicht ermittelt werden. Eine Diskussion zu diesem Problem wird in Kapitel 5 gehalten.

Der prozentuale Anteil des ermittelten Preises NVG^{Risiko}_{bio} beziehungsweise NVG^{KLV}_{bio} von der Todesfallleistung N_{n-1} beziehungsweise T_n kann schnell berechnet werden. Das allgemeine Bewertungsprinzip liefert einzelvertragliche Ergebnisse. Werden mehrere Szenarien veranschlagt, kann mit dem entstandenen Netz von Werten eine Abschätzung für einen Preis der biometrischen Option gegeben werden. Befindet ein Lebensversicherungsunternehmen es für notwendig, so wird die Option in den Tarifen einkalkuliert.

4.5.1.2 Die Dynamik

Die Dynamik ist eine dauerhafte Art der Nachversicherungsgarantie. Es handelt sich dabei um planmäßige Erhöhungen, die prozentual auf die Leistungen

oder auf die Beiträge erhoben werden. Für die Bewertung der Dynamik wird davon ausgegangen, dass der „schlimmste Fall“ für das Lebensversicherungsunternehmen eintritt. Das bedeutet, es wird erwartet, dass über die gesamte Beitragszahlungsdauer die dynamischen Erhöhungen vorgenommen werden. Der Versicherungsnehmer lehnt die Dynamik zu keinem Zeitpunkt ab. Tritt allerdings ein Leistungsfall ein, so ist die Dynamik beendet.
Die Bewertung der dynamischen Erhöhungen der Versicherungsleistung wird an Hand der Risikolebensversicherung verdeutlicht. Das Verfahren kann auf jede andere Art von Lebensversicherung übertragen werden.

Dynamische Erhöhung der Versicherungsleistung

Eine einzelne dynamische Erhöhung auf die Versicherungsleistungen kann ebenso bewertet werden, wie die Nachversicherungsgarantie unter objektiven Ereignissen. Das bedeutet, dass für die erste Anhebung der Versicherungssumme die Differenz der Leistungsbarwerte genau so vollzogen wird. Mit allen weiteren Erhöhungen kann die Vorgehensweise ebenso geschehen. Allerdings ist darauf zu achten, dass die benutzten Werte bereits alle dynamischen Zuwächse der Vorjahre enthalten.
Die Notation einer Risikolebensversicherung aus dem Kapitel 4.3.1 werden beibehalten. Der Prozentsatz wird mit q_{VS} bezeichnet. Dann berechnen sich die Todesfallleistungen der folgenden Versicherungsjahre gemäß der Tabelle 4.2:

Anzahl der Erhöhungen	Zuwachs der Todesfallleistung	neue Todesfallleistung
1	$E_1 = D_0\ q_{VS}$	$N_1 = D_0 + E_1$
2	$E_2 = N_1\ q_{VS}$	$N_2 = N_1 + E_2$
3	$E_3 = N_2\ q_{VS}$	$N_3 = N_2 + E_3$
...	...	...
k	$E_k = N_{k-1}\ q_{VS}$	$N_k = N_{k-1} + E_k$
...	...	...
$(t-1)$	$E_{t-1} = N_{t-2}\ q_{VS}$	$N_{t-1} = N_{t-2} + E_{t-1}$

Tabelle 4.2: *Dynamik: Erhöhungen der Todesfallleistung*

Die erste Erhöhung der Todesfallleistung wirkt sich erst auf die zweite Beitragszahlung aus. Somit entspricht die $(t-1)$-te Anhebung der letzten dynamischen Erhöhung.

Die Differenzen der Leistungsbarwerte werden in der Tabelle 4.3 aufgezählt:

Anzahl der Erhöhungen	Differenz der Leistungsbarwerte
1	$\left(\mid \lvert_{n-1}A_{x+1}^{mSel} - \lvert_{n-1}A_{x+1}^{oSel} \mid \right) \; E_1 \; {}_1p_x \; v^1$
2	$\left(\mid \lvert_{n-2}A_{x+2}^{mSel} - \lvert_{n-2}A_{x+2}^{oSel} \mid \right) \; E_2 \; {}_1p_{x+1} \; v^2$
3	$\left(\mid \lvert_{n-3}A_{x+3}^{mSel} - \lvert_{n-3}A_{x+3}^{oSel} \mid \right) \; E_3 \; {}_1p_{x+2} \; v^3$
...	...
k	$\left(\mid \lvert_{n-k}A_{x+k}^{mSel} - \lvert_{n-k}A_{x+k}^{oSel} \mid \right) \; E_k \; {}_1p_{x+k-1} \; v^k$
...	...
$(t-1)$	$\left(\mid \lvert_{n-(t-1)}A_{x+t-1}^{mSel} - \lvert_{n-(t-1)}A_{x+t-1}^{oSel} \mid \right) \; E_{t-1} \; {}_1p_{x+t-2} \; v^{t-1}$

Tabelle 4.3: *Dynamik: Differenzen der Leistungsbarwerte*

Wegen der Übersichtlichkeit sind die absoluten Erhöhungen E_k von den Leistungsbarwerten ausgeklammert worden. Die Gewichtung der Differenzen wird in jedem Versicherungsjahr durchgeführt, denn jede Erhöhung muss einzeln betrachtet werden.

Dann wird die Summe aller gewichteten Differenzen als Wert der biometrischen Option verstanden:

Preis der Dynamik mit $\mathbf{t-1}$ Erhöhungen auf die Todesfallleistung in einer Risikolebensversicherung

$$\boxed{\mathbf{DYNVS_{bio}^{Risiko}} = \sum_{\mathbf{k=1}}^{\mathbf{t-1}} \left(\mid \lvert_{\mathbf{n-k}}\mathbf{A_{x+k}^{mSel}} - \lvert_{\mathbf{n-k}}\mathbf{A_{x+k}^{oSel}} \mid \right) \; \mathbf{E_k \; {}_1p_{x+k-1} \; v^k}}$$

Die gezeigte Vorgehensweise kann bei Erhöhungen der Beitragszahlungen analog durchgeführt werden. Dabei sind folgende Punkte zu beachten:

- Wie die in Tabelle 4.2 aufgestellten Erhöhungen der Versicherungsleistungen, können auch die Erhöhungen des Beitrags ermittelt werden.
- Aus den jeweiligen Beitrag wird die gültige Versicherungsleistung berechnet.
- Das Verfahren, wie bei den dynamischen Erhöhungen auf die Versicherungsleistung, kann nun an den bestimmten Zuwächsen der Leistungen für jedes Versicherungsjahr angewendet werden.

Bei der Dynamik kann im Allgemeinen auf Ausübungswahrscheinlichkeiten verzichtet werden, wenn vom „schlimmsten Fall" ausgegangen wird. Das heißt, dass ein Versicherungsnehmer alle möglichen dynamischen Erhöhungen durchführen lässt. Hat ein Lebensversicherungsunternehmen Begrenzungen für die Dynamik integriert, so können diese leicht über definierte Bedingungen in das Verfahren eingebaut werden.

Auch hier kann der prozentuale Anteil des Preises $DYNVS_{bio}^{Risiko}$ von der Todesfallleistung N_{t-1} ermittelt und eine Szenarioberechnung durchgeführt werden, um eine globale Abschätzung für den Wert der Option zu geben.

4.5.2 Bewertung der Umtauschoption

Bei der Umtauschoption wird die Risikolebensversicherung in einen Neuabschluss einer kapitalbildenden Lebensversicherung ohne eine erneute Gesundheitsprüfung umgewandelt. Da bei einem echten Neuabschluss eine Gesundheitsprüfung durchgeführt wird, kann das allgemeine Bewertungsprinzip auf den Abschluss der kapitalbildenden Lebensversicherung angewendet werden. Die Umtauschoption kann nur innerhalb der ersten Versicherungsjahre ausgeübt werden. Meist gilt die Option in den ersten zehn Versicherungsjahren. Das bisherige Deckungskapital der Risikolebensversicherung kann bei der Berechnung vernachlässigt werden, da das Deckungskapital bei dieser Art der Lebensversicherung nur eine geringe Bedeutung aufweist. Die Funktion des Deckungskapitals einer Risikolebensversicherung besteht nur im Ausgleich, um die Prämien konstant zu halten.

Um zur Bewertung zurück zu kehren, können gleich zu Beginn die Leistungsbarwerte ermittelt werden. Dabei gelten die folgenden Bezeichnungen:

s	–	Ausübungszeitpunkt mit $1 \leq s \leq 10$
m	–	Verlängerung der Vertragslaufzeit mit $0 \leq m \leq (\omega - x - n)$
D_k	–	Todesfallleistung mit $D_k = konstant$

ω entspricht dem Höchstendalter einer Risikolebensversicherung, wobei das in den Lebensversicherungsunternehmen unterschiedlich ausfallen kann.

$$|_{n-s+m}A_{x+s}^{oSel} = \frac{M_{x+s}^{oSel} - M_{x+n+m}^{oSel}}{D_{x+s}^{oSel}}\ D_k$$

$$|_{n-s}A_{x+s}^{mSel} = \frac{M_{x+s}^{mSel} - M_{x+n+m}^{mSel}}{D_{x+s}^{mSel}}\ D_k$$

Dann hat die Differenz der Leistungsbarwerte, gewichtet mit der Überlebenswahrscheinlichkeit ${}_sp_x$ der versicherten Person bis zum Ausübungszeitpunkt s und zum Vertragsbeginn diskontiert mit v^s, das Ergebnis:

Preis der Umtauschoption von einer Risikolebensversicherung in eine kapitalbildende Lebensversicherung mit möglicher Verlängerung der Vertragslaufzeit

$$\boxed{\mathbf{UMTAUSCH_{bio}} = \ {}_\mathbf{s}\mathbf{p_x}\ \mathbf{v^s}\ \left(\ \left|\ |_\mathbf{n-s+m}\mathbf{A_{x+s}^{mSel}} - |_\mathbf{n-s+m}\mathbf{A_{x+s}^{oSel}}\ \right|\ \right)}$$

Mittels der Berechnung des prozentualen Anteils der Preises $UMTAUSCH_{bio}$ an der Versicherungsleistung und den Szenarioberechnungen, kann eine Abschätzung über den Wert der Option gegeben werden. Dieser sollte, wenn notwendig, in den Tarif einkalkuliert werden.

An dieser Stelle muss erwähnt werden, dass auch der Preis der Umtauschoption mit einer Ausübungswahrscheinlichkeit versehen werden muss. Dazu nochmals der Verweis auf Kapitel 5.

4.5.3 Bewertung des Kapitalwahlrechts

Das Kapitalwahlrecht wurde bereits unter dem finanziellen Aspekt betrachtet und bewertet. Allerdings spielt diese Option eine gesonderte Rolle. Das Kapitalwahlrecht kann sich nicht nur finanziell schlecht auf ein Lebensversicherungsunternehmen auswirken, sondern auch biometrisch. Dabei hat die Wahl zwischen einer Leibrente oder der einmaligen Kapitalabfindung keinerlei Auswirkungen auf Grund einer nicht durchgeführten Gesundheitsprüfung. Denn nimmt eine versicherte Person das Kapitalwahlrecht in Anspruch, so endet der Lebensversicherungsvertrag. Worin besteht also die Gefahr bei einer biometrischen Betrachtungsweise des Kapitalwahlrechts?

4.5.3.1 Das Kapitalwahlrecht als biometrische Option

Um die eben gestellte Frage zu beantworten, muss überlegt werden, welcher biometrische Auslöser in Frage kommt, damit eine versicherte Person das Kapitalwahlrecht ausübt.
Eine aufgeschobene Rentenversicherung bietet der versicherten Person nach der Aufschubzeit von n Versicherungsjahren lebenslange Rentenzahlungen. Für eine Ausübung des Kapitalwahlrechts kann es aus biometrischer Sicht nur einen Grund geben. Die versicherte Person hat aus persönlicher Wahrnehmung keine hohe Lebenserwartung. Das ist zwar ein subjektiver Fakt, aber ist dies der Fall, so kann mit einer Ausübungswahrscheinlichkeit von 1 gerechnet werden.
Begründet wird diese Antwort damit, dass die versicherte Person auch an dieser Stelle ein finanzrationales Denken besitzt. Wenn die Kapitalabfindung größer ist, als die Rentenzahlungen, die sie selbst noch zu erwarten glaubt, wird die versicherte Person die Option ausüben.
Dadurch entsteht innerhalb des Kollektivs zu Beginn der Rentenbezugszeit ebenso eine Selektion, wie bei der Ausübung von biometrischen Optionen ohne eine erneute Gesundheitsprüfung. Die nicht durchgeführte Gesundheitsprüfung hat zur Folge, dass die Sterbewahrscheinlichkeiten nach in Anspruchnahme der Option höher ausfallen. Das bedeutet für ein Versicherungskollektiv, dass das versicherte Risiko Tod erhöht ist. Im Falle des Kapitalwahlrechts kann ebenso eine Selektion des Kollektivs statt finden. Wie bereits erläutert, wird die Kapitalabfindung von den versicherten Personen gewählt, die eher hohe Sterbewahrscheinlichkeiten haben. Somit verringert sich die Sterbewahrscheinlichkeit des Versicherungskollektivs im Rentenbezug. Diese Auswirkung hält auch hier nur in den ersten Rentenbezugsjahren an. Der Grund dafür ist schnell ersichtlich. Im Rentenalter sind die Sterbewahrschein-

lichkeiten allgemein höher, als das in jungen Jahren der Fall ist. Sie nähern sich nach einigen Jahren der Rentenbezugszeit den normalen Sterbewahrscheinlichkeiten an.
Da auch beim Kapitalwahlrecht unter dem biometrischen Aspekt eine Selektion vorzufinden ist, kann auch hier eine einzelvertragliche Bewertung mittels Leistungsbarwerten vorgenommen werden.

4.5.3.2 Bewertungsmethode für das Kapitalwahlrecht

Da sich Lebensversicherungsunternehmen der anfänglichen Selektion in der Rentenbezugsphase bewusst sind, fallen die einkalkulierten Sterbewahrscheinlichkeiten für das Kollektiv im Rentenbezug geringer aus. Mittels dieser Sterbewahrscheinlichkeiten werden die Leistungsbarwerte berechnet. Wie aus dem Kapitel 3.3.1 bekannt, hat der Leistungsbarwert einer aufgeschobenen Rentenversicherung die folgende Darstellung:

$$
\begin{aligned}
{}_{n|}\ddot{a}_x &= \sum_{k=0}^{\omega-x-n} {}_{n+k}p_x \; v^{n+k} \\
&= \frac{N_{x+n}}{D_x}
\end{aligned}
$$

Dabei gilt die bekannte Notation. Die zweite Darstellung erfolgt mittels Kommutationszahlen.

Im nächsten Schritt muss überlegt werden, wie die Selektion innerhalb der Rentenbezugszeit in den Sterbewahrscheinlichkeiten deutlich gemacht werden kann.
Zur Bewertung des Kapitalwahlrechts werden die Sterbewahrscheinlichkeiten 2. Ordnung heran gezogen. Da die einkalkulierten Sterbewahrscheinlichkeiten im Rentenbezug bereits geringer ausfallen, als die normalen Sterbewahrscheinlichkeiten, ist die Selektion des Versicherungskollektivs bedacht worden. Allerdings besteht die Möglichkeit, dass die Kalkulation vom Lebensversicherungsunternehmen zwar ausreichend ist, aber trotzdem innerhalb des Kollektivs für eine starke Veränderung der Risikostruktur sorgen könnte. Das bedeutet, die Gefahr der Langlebigkeit des Versicherungskollektiv kann für das Lebensversicherungsunternehmen ein erhöhtes Risiko darstellen.
Um nun eine erhöhte Selektion in Betracht zu ziehen, können die zur Bewertung verwendeten Sterbewahrscheinlichkeiten 2. Ordnung geringer gesetzt

werden. Dies kann für die ersten fünf bis zehn Versicherungsjahre im Rentenbezug geschehen. Der Abschlag der Sterbewahrscheinlichkeiten mit enthaltener Selektion muss von einem Lebensversicherungsunternehmen selbst gewählt werden. Empfohlen wird eine Szenariorechnung.
Für die Untersuchung in dieser Arbeit werden die Sterbewahrscheinlichkeiten 2. Ordnung für die Rentenbezugsphase in den ersten fünf Versicherungsjahren geringer gesetzt. Da für diese Arbeit keine praxisbezogenen Daten zur Verfügung stehen, wird hier die Sterbetafel DAVSt2004R [6] benutzt. Die Sterbewahrscheinlichkeiten aus der Sterbetafel DAVSt2004R sollen damit die Sterbewahrscheinlichkeiten 2. Ordnung für die Rentenbezugsphase ersetzen. Ausgehend von einem 5%-igen und 10%-igen Abschlag werden die Sterbewahrscheinlichkeiten der DAVSt2004R für die fünfjährige Selektionszeit zu Begin der Rentenbezugsphase verringert.
Die Tabelle 4.4 zeigt ein Beispiel mit einem Rentenbezugsbeginn von 65 Jahren. Sie enthält die Sterbewahrscheinlichkeiten der Tafel DAVSt2004R in der zweiten Spalte, die als Sterbewahrscheinlichkeiten ohne Einfluss einer Selektion gelten. In der dritten und vierten Spalte finden sich die Sterbewahrscheinlichkeiten, die den Einfluss der Selektion zu Beginn der Rentenbezugsphase über fünf Jahre mit 5%-igen beziehungsweise 10%-igen Abschlag wieder spiegeln. Sie gleichen sich der Sterbewahrscheinlichkeiten der DAVSt2004R innerhalb der Selektionszeit von fünf Jahren an.

x	$q_x^R = q_x^{oSel}$	q_x^{mSel} mit 5%	q_x^{mSel} mit 10%
64	$0,003707$	$0,003707$	$0,003707$
65	$0,003980$	$0,003781$	$0,003582$
66	$0,004270$	$0,004099$	$0,003928$
67	$0,004631$	$0,004492$	$0,004353$
68	$0,004995$	$0,004895$	$0,004795$
69	$0,005363$	$0,005309$	$0,005256$
70	$0,005744$	$0,005744$	$0,005744$
71	$0,006150$	$0,006150$	$0,006150$

Tabelle 4.4: q_x^R *aus der Sterbetafel DAVSt2004R und* q_x^{mSel} *mit einem Selektionseinfluss von* 5% *beziehungsweise* 10%

[6] DAVSt2004R wird zur Kalkulation von Rentenversicherungen verwenden. Die Sterbetafeln werden von der DAV herausgegeben und enthalten genügend Sicherheitszuschläge, so dass die dauernde Erfüllbarkeit der Lebensversicherungsverträge garantiert ist.

Mittels der Kommutationszahlen, die mit den unterschiedlichen Sterbewahrscheinlichkeiten q_x^{mSel} und q_x^{oSel} berechnet wurden, können die Leistungsbarwerte

$$_n|\ddot{a}_x^{oSel} = \frac{N_{x+n}^{oSel}}{D_x^{oSel}}$$

$$_n|\ddot{a}_x^{mSel} = \frac{N_{x+n}^{mSel}}{D_x^{mSel}}$$

ermittelt und die Differenz gebildet werden. Dann kann der Wert des Kapitalwahlrechts gewichtet und wie folgt angegeben werden:

Preis des Kapitalwahlrechts unter dem biometrischen Aspekt

$$\boxed{\mathbf{KWR_{bio} = \ {}_np_x \ v^n \ \left(\left| \ {}_n|\ddot{a}_x^{mSel} - {}_n|\ddot{a}_x^{oSel} \ \right| \right)}}$$

Kapitel 5

Einflussfaktoren für die Ausübung von Optionen in der Lebensversicherung

Unter welchen Umständen ein Versicherungsnehmer eine Option ausübt, ist bisher noch nicht angesprochen worden. Es können die verschiedensten Faktoren auf den Versicherungsnehmer einwirken. Daran ist auch die Ausübungswahrscheinlichkeit einer jeden Option geknüpft. In diesem Kapitel wird zu jeder bewerteten Option eine Diskussion geführt, welche Faktoren auf einen Versicherungsnehmer beeinflussen. Dabei kann zwischen inneren und äußeren Einflussfaktoren unterschieden werden. Die äußeren Faktoren können an der folgenden Aufzählung festgemacht werden.

- Finanzmarktlage
- Arbeitsmarktlage
- steuerliche Rahmenbedingungen
- medizinisch bestätigter Gesundheitszustand

Innere Faktoren sind subjektive Einflüsse auf den Versicherungsnehmer und meist privater Natur, wie beispielsweise die private Finanzlage, die subjektive Einschätzung der eigenen Gesundheit und die derzeitigen Lebenssituation. Dabei kann gesagt werden, dass ein Versicherungsnehmer mit finanzrationalem Denken sich nach den äußeren Faktoren richten wird.

Die Ausübungswahrscheinlichkeiten, welche fest an die möglichen Einflussfaktoren gekoppelt sind, können dabei nicht immer abgeschätzt werden. Untersuchungen zu diesem Problem werden derzeit in den Rückversicherungen vorgenommen, denn diese haben eine Vielzahl von Datenmengen, um realistische Ausübungswahrscheinlichkeiten für einzelne Optionen zu ermitteln. Dies ist nicht immer ganz einfach, wie im weiteren Verlauf festgestellt werden kann.

5.1 Das Kapitalwahlrecht

Das Kapitalwahlrecht ist die bekannteste und auch die wichtigste unter allen Optionen, die in Lebensversicherungen enthalten sein können. Es wird in der aufgeschobenen Rentenversicherung angeboten und verschafft dem Versicherungsnehmer die Möglichkeit, statt lebenslangen Rentenzahlungen auch die einmalige Kapitalabfindung zu gebrauchen. Doch in welchen Situationen wird sich der Versicherungsnehmer gegen die Leibrente und für die Kapitalabfindung entscheiden? Auf diese Frage gibt es eine Vielzahl von denkbaren Antworten, die hier diskutiert werden sollen.

Angefangen mit den äußeren Einflussfaktoren kann sich überlegt werden, in wie weit die Ausübung des Kapitalwahlrechts an die Finanzmarktlage geknüpft ist. Dabei ist die Koppelung an den Marktzins der Hauptpunkt. Ist der aktuelle Zinssatz auf einem sehr niedrigen Niveau, das Lebensversicherungsunternehmen kann aber mit dem garantierten Zinssatz und der Überschussbeteiligung eine höhere Rendite anbieten, so wird sich der Versicherungsnehmer für die lebenslangen Rentenzahlungen entscheiden. Mit einem hohen Zinsniveau am Markt steigt jedoch die Wahrscheinlichkeit, dass die Kapitalabfindung gewählt wird. Dann kann der Versicherungsnehmer das ausgezahlte Geld anderweitig investieren, um eine höhere Rendite erzielen zu können. Die Ausübungswahrscheinlichkeit richtet sich dementsprechend nach dem aktuellen Zinsniveau. Werden die Versicherungsnehmer einer genügend großen Stichprobe beobachtet, wie sie auf die jeweilige Finanzmarktlage reagieren, so könnten Wahrscheinlichkeiten für eine Ausübung veranschlagt werden.

Auch der Arbeitsmarkt spielt eine Rolle bei der Optionsausübung, denn die Arbeitsmarktsituation spiegelt sich innerhalb des Kollektivs wieder. Sind die Arbeitslosenzahlen sehr hoch, werden eher wenige das Kapitalwahlrecht ausüben. Bekommt ein Versicherungsnehmer Arbeitslosengeld oder -hilfe, so werden alle weiteren privaten Einkünfte angerechnet. Um das regelmäßige Einkommen zu sichern, ist es von Vorteil die Rentenzahlungen zu wählen, da die Kapitalabfindung vollständig berücksichtigt wird bei der Berechnung der monatlichen Unterstützung vom Staat. Das Kapitalwahlrecht wird daher mehr in Anspruch genommen, wenn das regelmäßige private Einkommen gesichert ist, was bei einer guten Arbeitsmarktsituation eher der Fall ist. Die Kapitalabfindung steht dann vollends den privaten Zwecken zur Verfügung.

Die Berücksichtigung der steuerlichen Rahmenbedingung für die Ausübung des Kapitalwahlrechts ist auch nicht zu unterschätzen. In den letzten Jah-

ren hat sich einiges in Bezug auf die Versteuerung von Lebensversicherungen geändert. Seit dem 01.01.2005 gilt das Alterseinkünftegesetz. Darunter wird die steuerliche Behandlung von Altersvorsorgeaufwendungen und Alterseinkünfte neu geregelt. Weiterhin wird das Rentenbezugsmitteilungsverfahren eingeführt.
Die wesentlichen Änderungen und Neuerungen nach dieser Steuerreform werden im folgenden zusammengefasst:

- Alterseinkünfte werden erst dann besteuert, wenn sie an den Steuerpflichtigen ausgezahlt werden.
- Beiträge zur Altersvorsorge bleiben bis zu einem jährlichen Höchstbeitrag unversteuert.
- Der Übergang zur Steuerfreistellung von Altersvorsorgeaufwendungen und die Besteuerung der Alterseinkünfte wird schrittweise bis zum Jahr 2025 beziehungsweise 2040 durchgeführt.
- Für private Rentenversicherungen und kapitalbildende Lebensversicherungen gilt bezüglich der Aufwendungen:
  - Bei Vertragsabschluss vor dem 31.12.2004 sind Beiträge nicht ansetzbar.
  - Bei Vertragsabschluss vor dem 01.01.2005 sind Beiträge bis zu einem Höchstbetrag abziehbar (§ 10 Abs. 4 EStG)[1].
- Für die private Rentenversicherung gilt bezüglich der Leistungen:
  - Ertragsanteilbesteuerung nach § 22 Nr. 1a/bb EStG
  - abgekürzte Rentenzahlungen: Kapitalertragsbesteuerung des Differenzbetrags nach § 20 Abs. 1 Nr. 6 EStG

Bei einer aufgeschobene Rentenversicherung mit einem Vertragsabschluss nach dem 31.12.2004 wird die Kapitalabfindung zur Hälfte der Erträge versteuert. Dies ist nur dann gültig, wenn die Vertragslaufzeit mindestens zwölf Jahre beträgt und der Versicherungsnehmer zum Bezug das 60. Lebensjahr bereits vollendet hat. Sonst wird eine volle Besteuerung nach § 20 Abs. 1 Nr. 6 EStG vorgenommen.
Auf weitere relevante Bestimmungen dieser Steuerreform bezüglich der Altersvorsorgeaufwendungen und Alterseinkünften wird an der jeweiligen Stelle

[1] EStG = Einkommensteuergesetzbuch

eingegangen.

Der vermutlich relevanteste Punkt für die Entscheidung zwischen Leibrente und Kapitalabfindung entspricht dem medizinisch bestätigten Gesundheitszustand. Ist ein Versicherungsnehmer nachweislich gesund und besitzt eine noch hohe Lebenserwartung, so werden hier die Rentenzahlungen fällig. Bei Krankheit des Versicherungsnehmers wird dieser eher das Kapitalwahlrecht ausüben. Denn sind die von ihm noch zu erwartenden Rentenzahlungen geringer als die Kapitalabfindung und er übt die Option nicht aus, so ist er kein finanzrational denkender Versicherungsnehmer. Somit ist die Ausübungswahrscheinlichkeit bei Krankheit eines Versicherungsnehmers am höchsten. Die Szenarien aus Kapitel 4.5.3 zeigen die Gefahr der Antiselektion.
Wird das Kapitalwahlrecht aus dem Grund der Krankheit ausgeübt, so fallen alle anderen Faktoren weg. Denn bei einer tödlichen Krankheit wird es den Versicherungsnehmer nicht interessieren, wie der Finanzmarkt oder Arbeitsmarkt aussieht, oder wie viel Steuern er auf die Kapitalabfindung zahlen muss.
Für die Ausübungswahrscheinlichkeiten bedeutet dies, dass die Einflussfaktoren abhängig von einander sind und daher noch schwerer zu ermitteln.

Aber nicht nur die äußeren Einflussfaktoren sind einzubeziehen. Da die Voraussetzung, dass der Versicherungsnehmer ein finanzrationales Denken besitzt, nicht in jeder Situation gegeben sein kann, müssen auch die inneren Faktoren in Augenschein genommen werden.
Innere Einflussfaktoren sind von subjektiver Natur. Das können Wünsche sein, die sich der Versicherungsnehmer mit der Kapitalabfindung ermöglichen möchte. Beispielsweise das Reisen im Alter oder besondere Ereignisse treffen zu. Weiterhin kann er die gesamte Summe für eine Kreditablösung oder für den Kauf eines Altersruhesitzes benutzen. Ein Faktor ist die familiäre Situation. Die Kapitalabfindung kann zu gleichen Teilen aufgeteilt werden an Kinder und Enkelkinder. Ebenso ist es möglich, dass der Partner versorgt sein soll.
All diese Einflüsse sollten ebenso berücksichtigt werden. Dabei ist zu sagen, dass diese Einflüsse letztlich nicht messbar sind. Somit erschwert dies wiederum die Ermittlung von Ausübungswahrscheinlichkeiten.

In jedem Falle ist es derzeit wichtig, solche Ausübungswahrscheinlichkeiten zu bekommen, um eine realistische Prämie für Optionen in der Lebensversicherung berechnen zu können und den Preis eventuell in den Tarif einzukalkulieren.

5.2 Die Abruf- und die Aufschuboption

Die Abruf- und die Aufschuboption werden in aufgeschobenen Rentenversicherungen und in kapitalbildenden Lebensversicherungen angeboten. Im ersten Schritt soll auf die Einflussfaktoren für die aufgeschobene Rentenversicherung eingegangen werden.

Es wird ein flexibler Rentenbezugsbeginn mittels dieser Optionen geboten. Aus biometrischer Sicht sind kaum Gefahren auszumachen, da es nur darum geht, die Rentenzahlungen zu einem früheren oder zu einem späteren Zeitpunkt zu erhalten.
Die Arbeitsmarktlage und die Finanzmarktlage sind eher ausschlaggebend für eine Ausübung einer der Optionen. Wird der Arbeitsmarkt in Augenschein genommen, kann festgestellt werden, dass bei hoher Arbeitslosigkeit im Alter die Abrufoption gewählt werden wird. Denn die Sicherung eines regelmäßigen Einkommens ist mit den Rentenzahlung gestärkt. Ist die Arbeitsmarktlage besonders gut, so werden die Versicherungsnehmer des Kollektivs einen Aufschub des Rentenbezugstermins vornehmen, da ihr monatliches Einkommen als gesichert gilt.
Die Finanzmarktlage wirkt sich auch auf diese Optionen aus. Bei einem höheren Zinsniveau, als die garantierten Zinsen und die Überschussbeteiligung des Lebensversicherungsunternehmens, wird ein Versicherungsnehmer mit finanzrationalem Denken die Abrufoption ausüben, um die Rentenzahlungen in eine andere Anlage fließen zu lassen, die eine höhere Rendite erwirtschaftet. Umgekehrt wird der Versicherungsnehmer bei einem niedrigen Zinsniveau die Rentenzahlungen hinaus zögern, um die Überschüsse und garantierten Zinsen des Lebensversicherungsunternehmens einzubehalten.
Steuerlich kann sich an den Regelungen, die für das Kapitalwahlrecht aufgezählt wurden, orientiert werden.

Für die kapitalbildende Lebensversicherung kann bezüglich der Arbeitsmarktlage und der Finanzmarktlage ebenso argumentiert werden. Wobei es sich dann nicht um Rentenzahlungen, sondern um die Erlebensfallleistung handelt. Für die Leistungen einer kapitalbildende Lebensversicherung gelten die folgenden Punkt bezüglich der Versteuerung:

- Todesfallleistungen sind einkommensteuerfrei.
- Erlebensfallleistungen werden wie Kapitalwahlrecht besteuert.

Das bedeutet, die Hälfte der Erträge sind zu versteuern, wenn die Vertragslaufzeit mindestens zwölf Jahre beträgt und der Versicherungsnehmer bereits das 60. Lebensjahr vollendet hat.

Auch hier müssen die inneren Einflüsse beachtet werden. Für die Abrufoption können solche beispielsweise sein:

- Aufstockung des regelmäßigen Einkommens
- Eintritt in die Frührente oder Altersteilzeit
- Einzug in ein Altersheim

Die Aufschuboption könnte zum Beispiel ausgeübt werden, wenn:

- Späterer Renteneintritt
- Versicherungsnehmer kann vorerst verzichten
- top Gesundheit

Für die Ausübungswahrscheinlichkeiten gilt die Handhabung wie beim Kapitalwahlrecht. Es müssen mittels Beobachtungswerte von geeigneten Stichproben zu den verschiedenen Szenarien untersucht werden. Mittels dieser können langfristig sicher realistische Ausübungswahrscheinlichkeiten gewonnen werden.

5.3 Die Nachversicherungsgarantie

5.3.1 Die Nachversicherungsgarantie unter objektiven Ereignissen

Für das Ausüben dieser Nachversicherungsgarantie ist das Eintreten der objektiven Ereignisse ein wichtiges Kriterium zur Ermittlung von Ausübungswahrscheinlichkeiten. Dabei können Daten vom Statischen Bundesamt zugezogen werden, um die Wahrscheinlichkeiten der einzelnen Ereignisse zu bekommen. Dabei muss davon ausgegangen werden, dass das Versicherungskollektiv sich ebenso verhält wie die gesamte Bevölkerung. Wird weiterhin angenommen, dass die Ereignisse unabhängig von einander eintreten, so können die Einzelwahrscheinlichkeiten summiert werden.
Sind zu jedem objektiven Ereignis die Wahrscheinlichkeiten je Alter oder Altersgruppe bekannt, steht noch eine Frage offen. Übt der Versicherungsnehmer die Nachversicherungsgarantie auch aus, wenn er beispielsweise heiratet? An dieser Stelle kann darauf zurück gegriffen werden, wie Rückversicherungen dies beurteilen, da diese eine Vielzahl von Daten besitzen.

5.3.2 Die Dynamik

Die Dynamik ist eine planmäßige Erhöhung der Leistungen oder der Beiträge. In dieser Arbeit wird davon ausgegangen, wenn der Versicherungsnehmer bei Vertragsabschluss die Dynamik eingeschlossen hat, dass diese mit der Wahrscheinlichkeit 1 bis zur möglichen letzten Erhöhung beibehält.
Ist dies nicht der Fall, kann sich ein Lebensversicherungsunternehmen auf eigene Daten oder auf die, der Rückversicherungen stützen, um Wahrscheinlichkeiten für einen Widerspruch zu erlangen.

5.4 Die Umtauschoption

Die Umtauschoption einer Risikolebensversicherung in eine kapitalbildende Lebensversicherung enthält die Möglichkeit, die Vertragslaufzeit zu verlängern. Dazu das folgende Beispiel:

Ein Versicherungsnehmer hat im Zuge einer Kreditaufnahme eine Risikolebensversicherung abgeschlossen. Dies ist häufig eine Bedingung von Banken, wenn nicht genügend Rücklagen vorhanden sind. Nach zehn Jahren ist der Kredit abgelöst und der Versicherungsnehmer möchte aber weiterhin, dass die Hinterbliebenen bei Tod abgesichert sind. So entschließt er sich die Option auszuüben und gleichzeitig die Verlängerung der Vertragslaufzeit in Anspruch zu nehmen.

Auf den ersten Blick sind keine Probleme erkennbar, doch bei genauerer Betrachtung des Beispiels könnte es möglich sein, dass der Versicherungsnehmer beispielsweise eine Krankheit hat. Ihm ist bewusst, dass innerhalb der nächsten Jahre, aber erst nach Ablauf der ursprünglichen Vertragslaufzeit, sterben wird. Die Todesfallleistung aus der kapitalbildenden Lebensversicherung wird fällig. Da die Option ohne eine erneute Gesundheitsprüfung ausgeübt werden kann, ist dem Versicherungsunternehmen nicht bekannt, wie der Gesundheitszustand des Versicherungsnehmers tatsächlich ist.

Dieses Beispiel ist sicher nicht die Regel. Aber die Möglichkeit dessen ist gegeben. Da es die Umtauschoption noch nicht lang in der Lebensversicherungsbranche gibt, wurden bisher erst wenige Ausübungen registriert. Daher kann zu einer Ausübungswahrscheinlichkeit nichts weiter gesagt werden.

Kapitel 6

Zusammenfassung

Das Ziel der Arbeit bestand darin, Bewertungsmethoden vorzustellen, mit denen in Lebensversicherungsverträgen enthaltenen Optionen bewertet werden können. Dabei wurde unterschieden zwischen Optionen mit finanziellen und biometrischen Charakter.
Zur Bewertung der Finanzoptionen wurden diese als Finanzinstrument interpretiert und mittels gängiger Methoden aus der Praxis der Finanzwelt bewertet. Der Schwerpunkt lag dabei auf der Black-Scholes-Formel, welche über das Binomialmodell von Cox, Ross, Rubinstein vollständig hergeleitet wurde.
Die biometrischen Optionen wurden bewertet, in dem die bei Ausübung entstehende Selektion lokalisiert und mit der Differenz aus Leistungsbarwerten ermittelt wurde.

Es konnte festgestellt werden, dass das Kapitalwahlrecht einer aufgeschobenen Rentenversicherung eine besondere Rolle spielt. Es handelt sich bei diesem Wahlrecht um eine Finanzoption, welche als europäische Put-Option interpretiert und mittels der Black-Scholes-Formel bewertet wurde. Wie gezeigt wurde, kann das Kapitalwahlrecht ebenso als biometrische Option gesehen werden. Dabei wurde die Selektion innerhalb der ersten Versicherungsjahre der Rentenbezugsphase erkannt und der biometrische Wert der Option über die Differenz der entsprechenden Leistungsbarwerte ermittelt.

Bisher wurde ohne die Betrachtung von möglichen Einflussfaktoren für eine Optionsausübung gearbeitet. Diese sind allerdings ausschlaggebend für den Wert einer Option. Aus diesem Grund wurden die möglichen Einflüsse, die auf einen Versicherungsnehmer wirken können, um eine Option in Anspruch zu nehmen, im 5. Kapitel aufgezählt und erläutert. Die Schwierigkeit dabei ist es, aus den möglichen Faktoren Ausübungswahrscheinlichkeiten zu ermitteln.

Die bisherigen Ergebnisse müssen mit diesen Ausübungswahrscheinlichkeiten gewichtet werden, um realistische Ergebnisse bekommen zu können. Dabei wurde festgestellt, dass die beste Lösung darin besteht, auf bekannte Daten aus Lebensversicherungsunternehmen zurück zu greifen. Eine andere Art der Ermittlung von Ausübungswahrscheinlichkeiten gestaltet sich schwierig, da die verschiedensten Einflüsse auf den Versicherungsnehmer wirken können.
Aktuell beschäftigen sich Rückversicherungen mit dem Thema der Wahrscheinlichkeiten für eine Optionsausübung. Will also ein Lebensversicherungsunternehmen seine Optionen in den verschiedenen Lebensversicherungsverträgen bewerten, so ist es bisher nur möglich, die entsprechenden Daten von Rückversicherungen zu beziehen.

Wie letztendlich festgestellt werden konnte, bietet dieses Thema weiterführende Fragestellungen, die zu einem wirklich realistischen Ergebnis notwendig sind. Die bislang möglichen Abschätzungen der Optionswerte können daher zur gleichen Erkenntnis geführt werden, wie auch die Deutsche Aktuarsvereinigung in ihrer Arbeitsgruppe „Bewertung von Optionen“ feststellen musste. Die ermittelten Werte für Optionen sind im Allgemeinen zu hoch. Die Gewichtung mit Ausübungswahrscheinlichkeiten wird zu einem besseren Ergebnis führen.

Diese Thematik sollte weiter ausgebaut werden und die Lebensversicherungsunternehmen sollten die Bewertung an eigenen Optionen aus den Lebensversicherungsverträgen vornehmen. Dann kann eine wichtige Frage beantwortet werden:

Ist es notwendig, enthaltene Optionen in den Lebensversicherungstarif einzukalkulieren?

Anhang A

Das Einperioden-Binomialmodell zur Herleitung des äquivalenten Martingalmaßes

Wie im Kapitel 2.2.1 definiert, gibt das äquivalente Martingalmaß risikoneutrale Wahrscheinlichkeiten für das theoretische Modell an. Da in der wirklichen Finanzwelt die realen Wahrscheinlichkeiten nicht bekannt sind, werden die risikoneutralen Wahrscheinlichkeiten über die Arbitragefreiheit des Marktes hergeleitet. Dazu wird ein arbitragefreies Einperiodensystem vorgestellt, aus dem sich anhand des Einperioden-Binomialmodells das äquivalente Martingalmaß ergeben wird.

Das arbitragefreie Einperiodensystem

Wie der Name schon erahnen lässt, handelt es sich hierbei um ein Modell mit einem Zeitintervall $[t_0, T]$ ohne Teilintervalle, also nur einer Periode. Es gibt m risikobehaftete Anlageformen, die mit $A_1, ..., A_m$ bezeichnet werden. Der Preis der Anlagen zu Beginn des Zeitintervalls t_0 hat die Werte $A_1(t_0), ..., A_m(t_0)$. Mittels endlicher diskreter Zufallsvariablen lassen sich die Werte der Anlagen zum Ende des Zeitintervalls, also zu T, beschreiben. Dazu kann jede Anlageform l mögliche Zustände $s_1, ..., s_l$ zum Ende des Zeitintervalls mit den realen Wahrscheinlichkeiten $p_j > 0$ mit $j = 1, ..., l$, annehmen. Das heißt, das durch das Eintreten eines der l Zustände der Wert einer Anlageform zum Zeitpunkt T beeinflusst wird. $A_i(T, j)$ bezeichnet dann den Wert der i-ten Anlageform, wenn zum Zeitpunkt T der j-te Zustand eingetreten ist.

Im Einperiodensystem gibt es ebenso die risikolose Anlageform A_f mit der risikolosen Rendite r_f.

Das Einperioden-Binomialmodell

Das Einperioden-Binomialmodell stellt einen Spezialfall des arbitragefreien Einperiodensystems dar. Es gibt genau zwei Anlageformen A_1, A_2 und genau zwei Zustände s_1, s_2, welche die risikobehafteten Anlageformen zum Ende des Zeitintervalls annehmen können. Das heißt, es gilt $m = l = 2$. Weiterhin muss gelten, dass $A_1(T,1) \neq A_1(T,2)$ und $A_2(T,1) \neq A_2(T,2)$, da die Anlageformen risikobehaftet sind. Mit der eingeführten Notation kann der Einperioden-Binomialbaum durch folgende Abbildung A.1 dargestellt werden:

$$
\begin{tikzcd}
t_0 & T & \text{Zustände} \\
 & A_1(T,1), A_2(T,1) & s_1 \\
A_1(t_0), A_2(t_0) \arrow[ur] \arrow[dr] & & \\
 & A_1(T,2), A_2(T,2) & s_2
\end{tikzcd}
$$

Abbildung A.1: *Einperioden-Binomialbaum und seine Zustände*

Die Zustände s_1 und s_2 entsprechen einer Aufwärtsbewegung beziehungsweise einer Abwärtsbewegung der Anlageformen.

Mit der Bildung eines Portfolios P aus den Anlageformen A_1 und A_2 in der Form, dass gilt $P = \lambda A_1 - A_2$. Der eingetretene Zustand am Ende des Zeitintervalls soll nicht auf den Preis des Portfolio P einwirken, was durch die nachstehende Gleichung zur Geltung kommt:

$$\lambda A_1(T,1) - A_2(T,1) = \lambda A_1(T,2) - A_2(T,2)$$

Für λ ergibt sich dann

$$\lambda = \frac{A_2(T,2) - A_2(T,1)}{A_1(T,2) - A_1(T,1)}$$

Weiterhin ist zu erkennen, dass sich die Risiken der Anlageformen A_1 und A_2 in dem Portfolio P gegenseitig aufheben. Aus der Bedingung der Arbitragefreiheit kann nun gefolgert werden, dass P wie die risikolose Anlageform A_f auftritt, also einer risikolosen Verzinsung folgt. Demnach ist das Eintreten eines der Zustände s_1 oder s_2 unwichtig, denn wird der Wert zum Zeitpunkt T des Portfolios P mit der risikolosen Rendite diskontiert, so ergibt sich der Wert des Portfolios P zu Beginn. Es gilt also:

$$\begin{aligned} P(t_0) &= (1 + r_f)^{-1} P(T,1) \\ &= (1 + r_f)^{-1} P(T,2) \end{aligned}$$

Durch Einsetzen von

$$P(t_0) = \lambda A_1(t_0) - A_2(t_0) \text{und} P(T,1) = \lambda A_1(T,1) - A_2(T,1)$$

ergibt sich

$$\lambda A_1(t_0) - A_2(t_0) = (1 + r_f)^{-1} \left(\lambda A_1(T,1) - A_2(T,1)\right)$$

Somit lässt sich feststellen, dass die Werte untereinander bestimmt sind, wie

$$A_2(t_0) = \lambda A_1(t_0) - (1 + r_f)^{-1} \left(\lambda A_1(T,1) - A_2(T,1)\right)$$

Analog gilt, wenn der Zustand s_2 eintritt

$$A_2(t_0) = \lambda A_1(t_0) - (1 + r_f)^{-1} \left(\lambda A_1(T,2) - A_2(T,2)\right)$$

Die bisherige Folgerung hat den Ausschluss von Arbitrage aus dem Portfolio P über die ermittelte Gleichung für $A_2(t_0)$ zugelassen. Um alle Arbitragemöglichkeiten ausschließen zu können, wird mit den risikobehafteten

Anlageformen A_1 und A_2 und der risikolosen Anlageform A_f ein Arbitrageportfolio P_A konstruiert. Dabei müssen die Renditen in beiden möglichen Zuständen s_1, s_2 zum Zeitpunkt T bei beiden risikobehafteten Anlageformen höher oder niedriger sein, als die von A_f. Da es aber keine Arbitragemöglichkeiten geben soll, muss gelten:

$$\min\left(\frac{A_1(T,1) - A_1(t_0)}{A_1(t_0)}, \frac{A_1(T,2) - A_1(t_0)}{A_1(t_0)}\right) < r_f$$

$$\max\left(\frac{A_1(T,1) - A_1(t_0)}{A_1(t_0)}, \frac{A_1(T,2) - A_1(t_0)}{A_1(t_0)}\right) > r_f$$

Wenn bei der Bildung des Minimums $\geq$ zutreffend ist, so wird die Rendite von A_f mindestens bei Eintritt eines Zustands von der Rendite von A_1 übertroffen. Dadurch ist Arbitrage realisierbar, denn es entsteht kein Verlust sondern Gewinn, wenn A_1 über eine risikolose Geldaufnahme, wie bei A_f, finanziert wird.
Wenn bei der Bildung des Maximums $\leq$ gilt, so unterbietet die Rendite von A_1 die von A_f. Durch den Erlös aus dem Verkauf der risikolosen Anlageform A_f ist ein Arbitragegewinn erdenklich, denn der Gewinn aus dem Verkauf von A_1 besitzt höchstens den gleichen Wert.
Somit begründen sich die obigen Ungleichungen, um die Arbitragefreiheit gewährleisten zu können.

Durch Umformungen der Ungleichungen, kann nachstehendes Verhältnis festgestellt werden:

$$\min\left(A_1(T,1), A_1(T,2)\right) < (1 + r_f)A_1(t_0) < \max\left(A_1(T,1), A_1(T,2)\right)$$

Da es sich bei Zuständen s_1 beziehungsweise s_2 um eine Aufwärtsbewegung beziehungsweise um eine Abwärtsbewegung handelt, gilt für die risikobehaftete Anlageform $A_1(T,2) < A_1(T,1)$. Die Minimum- und Maximumbildung kann damit aufgelöst werden:

$$A_1(T,2) < (1 + r_f)A1(t_0) < A_1(T,1)$$

Nur eines der beiden Zustände kann zum Ende des Zeitintervalls $[t_0, T]$ eintreten. Daher kann gesagt werden, dass die Entwicklung der Anlageform mit einer Wahrscheinlichkeit von q^* den Zustand s_1 und mit $(1-q^*)$ den Zustand s_2 annimmt, für ein q^* mit $0 < q^* < 1$. Daraus folgt:

$$q^* A_1(T,1) + (1-q^*)A_1(T,2) = (1+r_f)A_1(t_0)$$

Durch mehrere Umformungen und Einsetzen der vorgestellten Gleichungen kann diese Beziehung ebenso für die Anlageform A_2 hergeleitet werden. Darauf soll an dieser Stelle verzichtet und nur die Angabe der Gleichung vorgenommen werden

$$q^* A_2(T,1) + (1-q^*)A_2(T,2) = (1+r_f)A_2(t_0)$$

Das äquivalente Martingalmaß $\mathbf{Q}^*$ entspricht der Wahrscheinlichkeitsverteilung mit den risikoneutralen Wahrscheinlichkeiten q und $(1-q)$. Das heißt, unter dem äquivalenten Martingalmaß $\mathbf{Q}^*$ bezeichnet q die Wahrscheinlichkeit für eine Aufwärtsbewegung und $(1-q)$ die Wahrscheinlichkeit einer Abwärtsbewegung des Aktienkurses.
Wird die Gleichung für $A_1(t_0)$ nach q^* umgestellt, so ergibt sich

$$q^* = \frac{(1+r_f)A_1(t_0) - A_1(T,2)}{A_1(T,1) - A_1(T,2)}$$

Die Ähnlichkeit mit der gegebenen Wahrscheinlichkeit $q = \dfrac{1+r_f-d}{u-d}$ für eine Aufwärtsbewegung lässt vermuten, dass das gesuchte Ergebnis erzielt wurde. In einem letzten Schritt, wird der Übergang der beiden Gleichungen von q^* zu q erläutert.
In q^* werden die tatsächlichen Werte des Aktienkurses verwendet. Das heißt, dass der tatsächliche Kurs zu Beginn t_0 und die tatsächlichen Werte der Aktie, falls der Kurs steigt $A_1(T,1)$ und falls der Kurs sinkt $A_1(T,2)$ benutzt werden. In der Formel für q sind die prozentualen Werte der Aktienkursentwicklung enthalten.
Eine Aufwärtsbewegung bedeutet, dass der Zustand s_1 eintritt. Der Zuwachs des Aktienkurses ist dann die Differenz $A_1(T,1) - A_1(t_0)$. Anders kann die Steigerung der Aktienkurses mit $(u-1)\%$ angegeben werden. Also kann der tatsächliche Wert des Aktienkurses über die relative prozentuale Angabe u ausgedrückt werden. Ebenso verhält es sich mit dem Eintreten des Zustands s_2. Die relative Abnahme des Aktienkurses beträgt $(1-d)\%$. Die tatsächlichen

Abnahme der Aktienkursentwicklung wird mit der Differnz $A_1(t_0) - A_1(T,2)$ dargestellt. Somit kann auch der tatsächliche Wert der Aktie $A_1(T,2)$ durch den relativen Wert d ersetzt werden.
Da es sich nun um relative Angaben handelt, ist es für die risikoneutrale Wahrscheinlichkeit nicht notwendig, die tatsächlichen Werte des Aktienkurses zu verwenden. Somit ergibt sich die Wahrscheinlichkeit für eine Aufwärtsbewegung der Aktie unter dem äquivalenten Martingalmaß $\mathbf{Q}^*$ durch

$$q = \frac{(1+r_f) - d}{u - d}$$

und für eine Abwärtsbewegung der Aktie

$$(1-q) = \frac{u - (1+r_f)}{u - d}.$$

Das Ziel der Herleitung von risikoneutralen Wahrscheinlichkeiten für die Aktienkursentwicklung ist erreicht. Da das äquivalente Martingalmaß die Arbitragefreiheit nach sich zieht, kann nun noch mit Hilfe der bekannten Tatsachen diese für das dargebotene System festgestellt werden. Dazu wird nun wie folgt argumentiert:

Das Arbitrageportfolio $P_A = \alpha A_1 + \beta A_2 + \gamma A_f$ muss die Bedingung

$$\alpha A_1(t_0) + \beta A_2(t_0) + \gamma = 0$$

erfüllen. Das heißt, es gilt ebenso:

$$(1+r_f)\left(\alpha A_1(t_0) + \beta A_2(t_0) + \gamma\right) = 0$$

Durch Ausklammern wird schnell erkannt, dass die obigen Gleichungen eingesetzt werden können:

$$
\begin{aligned}
0 &= \alpha\,(qA_1(T,1) + (1-q)A_1(T,2)) \\
&\quad + \beta\,(qA_2(T,1) + (1-q)A_2(T,2)) + \gamma(1+r_f) \\
&= q\,(\alpha A_1(T,1) + \beta A_2(T,1) + \gamma(1+r_f)) \\
&\quad + (1-q)\,(\alpha A_1(T,2) + \beta A_2(T,2) + \gamma(1+r_f)) \\
&= qP_A(T,1) + (1-q)P_A(T,2)
\end{aligned}
$$

Dabei gilt die obige Notation auch für P_A.
Das Arbitrageportfolio P_A kann für beide bis zum Zeitpunkt T eingetretenen Zustände s_1 und s_2 nur nicht negative Werte annehmen. Ebenso sind die Wahrscheinlichkeiten q und $(1-q)$ positiv. Daher kann die letzte Gleichung nur gleich null sein, wenn die Werte für das Arbitrageportfolio in beiden Zuständen ebenfalls null ist, also

$$P_A(T,1) = P_A(T,2) = 0$$

Das hat zur Folge, dass kein Arbitrageportfolio P_A konstruiert werden kann, also auch keine Arbitragemöglichkeit existiert.

Anhang B

Beweis der Eigenschaften

In diesem Teil des Anhangs werden die Eigenschaften, die in Kapitel 2. 2. 1 eine große Rolle spielen, mittels eines Hilfssatzes bewiesen. Weiterhin wird dieser Hilfssatz zur Herleitung der Black-Scholes-Formel in 2. 2. 2 verwendet. Zuvor wird die Definition des Landau-Symbols $o(.)$ benötigt, welches zu angenehmeren Ausdrücken bei Grenzwertuntersuchungen führen kann.

Definition

f und h seien zwei in der Nähe von 0 definierte reelle Funktionen in einer Variablen. Dann kann gesagt werden, f ist $o(h(x))$, wenn gilt

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{h(x)} = 0$$

Hilfssatz

μ und σ seien reelle Zahlen, wobei σ positiv sei. Dann gelten für die Funktionen f und g mit

$$f(x) = \frac{e^{\mu x^2} - e^{-\sigma x}}{e^{\sigma x} - e^{-\sigma x}}$$

$$g(x) = f(x) e^{\sigma x - \mu x^2}$$

die Gleichungen

$$f^*(x) = \frac{1}{2} + \left(\frac{\mu}{2\sigma} - \frac{\sigma}{4}\right) x + f_1^*(x)$$

$$g^*(x) = \frac{1}{2} + \left(\frac{\mu}{2\sigma} + \frac{\sigma}{4}\right) x + g_1^*(x),$$

wobei die Funktion f_1^* und g_1^* $o(x^2)$ sind, das heißt es gilt

$$\lim_{x \to 0} \frac{f_1^*(x)}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{g_1^*(x)}{x^2} = 0$$

Insbesondere sind f^* und g^* bei null durch den Funktionswert $\frac{1}{2}$ stetig ergänzbar.

Beweis

Der Hilfssatz kann bewiesen werden, in dem die Taylorreihenentwicklungen von den Funktionen f und g um den Entwicklungspunkt 0 konstruiert wird.
Mit der Taylorreihenentwicklung von $f(x)$ soll begonnen werden. Mit dem Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ nimmt $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ einen Grenzwert von „$\frac{0}{0}$" an. Ein solcher unbestimmter Ausdruck kann durch die Anwendung der Regel von l'Hospital abgewendet werden. Danach gilt, wenn $\frac{u'(x)}{v'(x)}$ für $x \to 0$ konvergent oder bestimmt divergent ist, so trifft das auch für $\frac{u(x)}{v(x)}$ zu. Dann kann der Ausdruck

$$\lim_{x \to 0} \frac{u(x)}{v(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{u'(x)}{v'(x)}$$

verwendet werden. Es werden also vom Zähler und vom Nenner im Grenzwert die Ableitungen gebildet:

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} f(x) &= \lim_{x\to 0} \frac{e^{\mu x^2} - e^{-\sigma x}}{e^{\sigma x} - e^{-\sigma x}} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{2\mu x e^{\mu x^2} + \sigma e^{-\sigma x}}{\sigma e^{\sigma x} + \sigma e^{-\sigma x}} \\
&= \frac{\sigma}{2\sigma} = \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

Zur Taylorreihenentwicklung für $f(x)$ gilt die Formel $f^*(x) = f(0) + f'(0)(x) + f_1^*(x)$. Somit ist der nächste Schritt die Bildung der ersten Ableitung von $f(x)$ unter der Benutzung der Quotientenregel [1].

$$
f'(x) = \frac{\left(e^{\sigma x} - e^{-\sigma x}\right)\left(2\mu x e^{\mu x^2} + \sigma e^{-\sigma x}\right) - \left(e^{\mu x^2} - e^{-\sigma x}\right)\left(\sigma e^{\sigma x} + \sigma e^{-\sigma x}\right)}{\left(e^{\sigma x} - e^{-\sigma x}\right)^2}
$$

Mit $f'(x) \to 0$ ist durch den unbestimmten Ausdruck „$\frac{0}{0}$“ ersichtlich, dass die Regel von l‘Hospital gebraucht werden muss. Für den Nenner von $f'(x)$ bedeutet das

$$
\left[\left(e^{\sigma x} - e^{-\sigma x}\right)^2\right]' = 2\sigma e^{2\sigma x} - 2\sigma e^{-2\sigma x}
$$

Mit $x \to 0$ gilt $(2\sigma - 2\sigma = 0)$. Das widerspricht der Bedingung für die Regel von l‘Hospital $v'(x) \neq 0$, woraus sich schließen lässt, dass die Regel ein weiteres Mal durchgeführt werden muss. Dann gilt für den Nenner:

$$
\left[2\sigma e^{2\sigma x} - 2\sigma e^{-2\sigma x}\right]' = 4\sigma^2 e^{2\sigma x} + 4\sigma^2 e^{-2\sigma x}
$$

Mit $x \to 0$hat der Nenner den Wert $8\sigma^2$. Die zweifache Anwendung der Regel von l‘Hospital bringt für den Zähler mit $x \to 0$ das Ergebnis

[1]Gilt die Form $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ dann entspricht die erste Ableitung $f'(x) = \frac{v(x)u'(x) - u(x)v'(x)}{(v(x))^2}$.

$4\sigma\mu - 2\sigma^3$. Zusammengefügt heißt das

$$\frac{4\sigma\mu - 2\sigma^3}{8\sigma^2} = \frac{\mu}{2\sigma} - \frac{\sigma^2}{4}$$

Somit hat die Taylorreihenentwicklung von $f(x)$ um den Entwicklungspunkt 0 die zu beweisende Form:

$$f^*(x) = \frac{1}{2} + \left(\frac{\mu}{2\sigma} - \frac{\sigma}{4}\right) x + f_1^*(x)$$

Der Beweis für $g(x)$ kann analog durchgeführt werden und liefert das Ergebnis

$$g^*(x) = \frac{1}{2} + \left(\frac{\mu}{2\sigma} + \frac{\sigma}{4}\right) x + g_1^*(x).$$

■

Nun können die Eigenschaften für den Erwartungswert und die Varianz

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \mathbf{E}\left(\ln\left(\frac{S(T)}{S}\right)\right) &= \lim_{\Delta t\to 0} \mathbf{E}\left(\ln\left(\frac{S(T)}{S}\right)\right) \\
&= \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T - t_0)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \mathbf{V}\left(\ln\left(\frac{S(T)}{S}\right)\right) &= \lim_{\Delta t\to 0} \mathbf{V}\left(\ln\left(\frac{S(T)}{S}\right)\right) \\
&= \sigma^2 (T - t_0)
\end{aligned}$$

der vorgestellten Folge von Binomialmodellen bewiesen werden.

Beweis für den Erwartungswert

Zunächst gilt $n = \dfrac{T-t_0}{\Delta t}$, $u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}$ und $p = f^*\left(\sqrt{\Delta t}\right)$, wobei f^* die Funktion aus dem voran gegangenen Hilfssatz darstellt. Dann gilt für den Erwartungswert:

$$\mathbf{E}\left(\ln\left(\frac{S(T)}{S}\right)\right) = (2np-n)\ln u$$

$$= \left(2\frac{T-t_0}{\Delta t}p - \frac{T-t_0}{\Delta t}\right)\sigma\sqrt{\Delta t}$$

Mit multiplizieren von $(T-t_0)$ und einsetzen der Funktion f^* folgt:

$$\frac{\mathbf{E}\left(\ln\left(\frac{S(T)}{S}\right)\right)}{T-t_0} = \frac{2f^*\left(\sqrt{\Delta t}\right)-1}{\sqrt{\Delta t}}\sigma$$

$$= \frac{2\left(\frac{1}{2}+\left(\frac{\mu}{2\sigma}-\frac{\sigma}{4}\right)\sqrt{\Delta t}+f_1^*\left(\sqrt{\Delta t}\right)\right)-1}{\sqrt{\Delta t}}\sigma$$

Durch Vereinfachen und Umformen des Terms und $\dfrac{o\left(\Delta t\right)}{\sqrt{\Delta t}} \xrightarrow{\Delta t\to 0} 0$ ist die Eigenschaft für den Erwartungswert bereits bewiesen:

$$\frac{\mathbf{E}\left(\ln\left(\frac{S(T)}{S}\right)\right)}{T-t_0} = \left(\mu-\frac{\sigma^2}{2}\right)+\frac{o\left(\Delta t\right)}{\sqrt{\Delta t}}$$

$$\mathbf{E}\left(\ln\left(\frac{S(T)}{S}\right)\right) = \left(\mu-\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t_0)$$

Beweis für die Varianz

Für die Varianz gilt zu Beginn:

$$\mathbf{V}\left(\ln\left(\frac{S(T)}{S}\right)\right) = \left[4p(1-p)\ln^2 u\right]n$$

Werden die gegebenen Werte für n, p und u eingesetzt und wird dabei beachtet, dass $f^*(x)(1-f^*(x)) = \dfrac{1}{4} + o(x)$ ist, dann gilt:

$$\mathbf{V}\left(\ln\left(\frac{S(T)}{S}\right)\right) = \left[4\left(\frac{1}{4} + o\left(\sqrt{\Delta t}\right)\right)\sigma^2 \Delta t\right]\left(\frac{T-t_0}{\Delta t}\right)$$

$$= \sigma^2\left(T-t_0\right) + o\left(\sqrt{\Delta t}\right)$$

und mit $o\left(\sqrt{\Delta t}\right) \overset{\Delta t \to 0}{\longrightarrow} 0$ ist auch die Eigenschaft für die Varianz der Folge von Binomialmodellen bewiesen:

$$\mathbf{V}\left(\ln\left(\frac{S(T)}{S}\right)\right) = \sigma^2\left(T-t_0\right)$$

$\blacksquare$

Anhang C

Verteilungen

C.1 Binomialverteilung

Die Binomialverteilung ist eine diskrete Verteilung und folgt dem Bernoulli-Schema. Dem entspricht ein Zufallsexperiment mit n unabhängigen Versuchen, wobei jeder Versuch zwei Ausgänge A und $\overline{A}$ aufweist. Die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten von A wird mit $P(A) = p$ bezeichnet. Daraus folgt, dass die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten von $\overline{A}$ mit der Gegenwahrscheinlichkeit $P(\overline{A}) = (1-p)$ übereinstimmt.
Ein bekannteste Beispiel für ein solches Zufallsexperiment ist das Urnenmodell mit Zurücklegen.
Wird eine diskrete Zufallsvariable X betrachtet, so ist X die zufällige Anzahl für das Eintreten von A bei n unabhängigen Versuchen. Dann ist X binomialverteilt mit den Realisierungen $0, ..., n$ und den Einzelwahrscheinlichkeiten

$$p_i = P(X = i) = \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} \text{ mit } i = 0, ..., n.$$

Der Erwartungswert und die Varianz einer binomialverteilten Zufallsvariablen X sind

$$\mathbf{E}(X) = np$$
$$\mathbf{V}(X) = np(1-p).$$

Somit wird die Binomialverteilung für eine Zufallsvariable X mit $X \sim B(n,p)$ bezeichnet.
Eine Approximation der Binomialverteilung wird im Grenzwertsatz von de Moivre und Laplace deutlich. Dabei konvergiert die Binomialverteilung mit $n \to \infty$ gegen die Normalverteilung.

C.2 Normalverteilung

Die Normalverteilung gehört zu den stetigen Verteilungen und ist die wichtigste Verteilung in der Wahrscheinlichkeitsrechnung, sowie die Grundverteilung der mathematischen Statistik.
Eine Zufallsvariable X wird als normalverteilt angesehen, wenn X sich aus der additiven Überlagerung einer großen Anzahl von zufälligen Einflüssen zusammen setzt und jeder dieser Einflüsse nur einen unbedeutenden Beitrag liefert. X besitzt mit den Realisierungen $x \in \mathbb{R}$ die folgende Dichtefunktion:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Dabei entspricht der Erwartungswert und Varianz der Normalverteilung für eine Zufallsvariable X

$$\mathbf{E}(X) = \mu$$
$$\mathbf{V}(X) = \sigma^2$$

Dann wird die Normalverteilung für eine Zufallsvariable X mit $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ bezeichnet.

C.2.1 Standardnormalverteilung

Die Standardnormalverteilung folgt aus der Standardisierung einer Zufallsvariablen X, welcher der Normalverteilung genügt. Dabei gilt:
Wenn $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ gilt, so ist die standardisierte Zufallsvariable

$$Y = \frac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0, 1).$$

Damit ist die Verteilung von X darstellbar mit

$$F_X(x) = F_Y\left(\frac{X - \mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{X - \mu}{\sigma}\right)$$

Auf Grund der Symmetrie der Standardnormalverteilung bezüglich $\mu = 0$ ist $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$ gültig.
Die Dichtefunktion der Standardnormalverteilung hat die Gestalt

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

C.3 Lognormalverteilung

Die Lognormalverteilung ist eine stetige Verteilung und hat ebenfalls als Grundlage die Normalverteilung. Eine stetige Zufallsvariable X heißt lognormalverteilt, wenn die Zufallsvariable $Y = \ln X$ normalverteilt ist mit $\mathbf{E}(\ln X) = \mu$ und $\mathbf{V}(\ln X) = \sigma^2$.
Die Dichtefunktion einer Lognormalverteilung ist

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}x} e^{-\frac{(lnx-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad \text{für } x > 0$$

Ist $x \leq 0$, so nimmt die Dichtefunktion den Funktionswert 0 an.
Der Erwartungswert und die Varianz der Lognormalverteilung ist bestimmt durch

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(X) &= e^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}} \\ \mathbf{V}(X) &= e^{2\mu+\sigma^2}\left(e^{\sigma^2}-1\right) \end{aligned}$$

Dabei sind μ und σ^2 Erwartungswert und Varianz der Normalverteilung von $\ln X$.
Die Lognormalverteilung kann durch das multiplikative Zusammenwirken vieler Zufallsvariablen erklärt werden.

Anhang D

Abkürzungsverzeichnis

D.1 Begriffsabkürzungen

BAFin	Bundesanstalt für Finanzdienstleistungsaufsicht
DAV	Deutsche Aktuarsvereinigung
EStG	Einkommensteuergesetz
VVG	Versicherungsvertragsgesetz

D.2 Aus der Optionspreistheorie

$S(k)$	Basiswert einer Option zum Zeitpunkt k
K	Basispreis einer Option
$c(T)$	Payoff eines Calls zur Fälligkeit T
$p(T)$	Payoff eines Puts zur Fälligkeit T
$c(t_0)$	Wert eines Calls zum Zeitpunkt t_0
$p(t_0)$	Wert eines Puts zum Zeitpunkt t_0
r	stetiger, risikoloser Zinssatz
A_i	Anlageform
A_f	risikolose Anlageform
r_i	Rendite der Anlageform A_i
r_f	risikolose Rendite der risikolosen Anlageform A_f
σ	Volatilität
$[t_0, T]$	Zeitintervall für eine Option
n	Anzahl der Teilintervalle

Δt	Länge eines Teilintervalls
u	Aufwärtsbewegung des Aktienkurses
d	Abwärtsbewegung des Aktienkurses
p	Wahrscheinlichkeit einer Aufwärtsbewegung
$(1-p)$	Wahrscheinlichkeit einer Abwärtsbewegung
q	risikoneutrale Wahrscheinlichkeit einer Aufwärtsbewegung
$(1-q)$	risikoneutrale Wahrscheinlichkeit einer Abwärtsbewegung
ν	Proportionalitätsfaktor für den Erwartungswert von $\ln\left(\frac{S(k)}{S}\right)$ zur Länge des bisher betrachteten Zeitraums k
σ^2	Proportionalitätsfaktor für die Varianz von $\ln\left(\frac{S(k)}{S}\right)$ zur Länge des bisher betrachteten Zeitraums k
μ	erwartete Rendite
$f^*(x)$	Funktion aus dem Anhang B
d_+, d_-	Argumente von Φ aus der Black-Scholes-Formel
$B(t_0, t)$	Wert eines Cashbonds nach k Teilperioden aus dem Zeitintervall $[t_0, t]$
$R(0, t)$	Spot Rate
$P(0, T)$	Wert eines Zerobonds zur Fälligkeit T
$r(t)$	Short Rate
$F(t_0, t)$	Forward Rate
$\frac{\Theta(t)}{a}$	langfristiges Mittel der Short Rate
N	Nennwert einer Zinsoption
c_j	Kuponzahlungen aus dem Zinsderivat zu den Zeitpunkten c_j
p_l	Payoff der l-ten Option
t_k^a	Ausübungszeitpunkte einer Bermuda-Option
(i, j)	Knoten im Trinomialbaum
p_u	Wahrscheinlichkeit einer Aufwärtsbewegung in der Standardverzweigung eines Trinomialbaums
p_m	Wahrscheinlichkeit für eine gleich bleibende Bewegung in der Standardverzweigung eines Trinomialbaums
p_d	Wahrscheinlichkeit einer Abwärtsbewegung in der Standardverzweigung eines Trinomialbaums

D.3 Aus der Versicherungsmathematik

Allgemeine Angaben

x	Alter der versicherten Person
ω	Endalter
n	Versicherungsdauer
t	Beitragszahlungsdauer
v	Diskontierungsfaktor
${}_np_x$	n-jährige Überlebenswahrscheinlichkeit eines x-jährigen
q_x	Sterbewahrscheinlichkeit eines x-jährigen
R_m	Höhe der Rentenzahlungen einer aufgeschobenen Rentenversicherung im m-ten Jahr mit $m = n, n+1, ..., \omega - x$
S_n	Höhe der Kapitalabfindung bei einer aufgeschobenen Rentenversicherung zum Ende des n-ten Jahres bei Ausübung des Kapitalwahlrechts - oder - Höhe der Erlebensfallleistung einer kapitalbildenden Lebensversicherung zum Ende des n-ten Jahres
D_k	Höhe der Todesfallleistung einer kapitalbildenden Lebensversicherung im k-ten Jahr mit $k = 1, 2, ..., n$ - oder - Höhe der Todesfallleistung einer Risikolebensversicherung im k-ten Jahr mit $k = 1, 2, ..., n$
P_t	Höhe der konstanten Prämienzahlungen über t Jahre

Bei Ausübung einer Option

s	Veränderung des Vertragsendes um s Jahre innerhalb der Abruf- oder Aufschuboption
s_m	Selektionsfaktoren
q_x^{oSel}	Sterbewahrscheinlichkeit eines x-jährigen ohne Beachtung einer Selektion
q_x^{mSel}	Sterbewahrscheinlichkeit eines x-jährigen unter Beachtung einer Selektion
$\widetilde{S}_{n-s}$	Höhe der Erlebensfallleistung einer kapitalbildenden Lebensversicherung mit vorgezogenem Vertragsende $n - s$ bei Ausübung der Abrufoption
$\widetilde{S}_{n-s}$	Höhe der Erlebensfallleistung einer kapitalbildenden Lebensversicherung mit aufgeschobenen Vertragsende $n + s$ bei Ausübung der Aufschuboption

$\widetilde{D}_k$	Höhe der Todesfallleistung einer kapitalbildenden Lebensversicherung mit $k = 1, 2, ..., n-s$ bei Ausübung der Abrufoption - oder - Höhe der Todesfallleistung einer kapitalbildenden Lebensversicherung mit $k = 1, 2, ..., n+s$ bei Ausübung der Aufschuboption
T_n	Anteil der Erhöhung der Erlebensfallleistung bei Ausübung einer biometrischen Option einer kapitalbildenden Lebensversicherung
U_n	Erlebensfallleistung nach Ausübung einer biometrischen Option einer kapitalbildenden Lebensversicherung
E_k	Anteil der Erhöhung der Todesfallleistung bei Ausübung einer biometrischen Option einer kapitalbildenden Lebensversicherung oder einer Risikoversicherung
N_k	Todesfallleistung nach Ausübung einer biometrischen Option einer kapitalbildenden Lebensversicherung oder einer Risikoversicherung

Leistungsbarwerte

$_{n}\vert\ddot{a}_x$	Leistungsbarwert einer um n Jahre aufgeschobenen Rentenversicherung
$\vert_{n}A_x$	Leistungsbarwert einer Risikolebensversicherung
$A_{x,\overline{n}\vert}$	Leistungsbarwert einer kapitalbildenden Lebensversicherung

Kommutationswerte

D_x	diskontierte Anzahl der Lebenden des Alters x
N_x	Summe der diskontierten Anzahl der Lebenden des Alters x
S_x	doppelte Summe der diskontierten Anzahl der Lebenden des Alters x
C_x	diskontierte Anzahl der x-jährigen Verstorbenen
M_x	Summe der diskontierten Anzahl der x-jährigen Verstorbenen
R_x	doppelte Summe der diskontierten Anzahl der x-jährigen Verstorbenen

Optionswerte

KWR_{Fin}	Wert des Kapitalwahlrechts unter dem finanziellen Aspekt bei einer aufgeschobenen Rentenversicherung
$AUFSCHUB_{Fin}$	Wert der Aufschuboption unter dem finanziellen Aspekt bei einer kapitalbildenden Lebensversicherung
KWR_{bio}	Wert des Kapitalwahlrechts unter dem biometrischen Aspekt bei einer aufgeschobenen Rentenversicherung
NVG_{bio}^{Risiko}	Wert der Nachversicherungsgarantie unter objektiven Ereignissen bei einer Risikolebensversicherung
NVG_{bio}^{KLV}	Wert der Nachversicherungsgarantie unter objektiven Ereignissen bei einer kapitalbildenden Lebensversicherung
$DYNVS_{bio}^{Risiko}$	Wert der dynamischen Erhöhungen auf die Versicherungsleistungen bei einer Risikolebensversicherung
$UMTAUSCH_{bio}$	Wert der Umtauschoption einer Risikolebensversicherung in eine kapitalbildende Lebensversicherung

Abbildungsverzeichnis

Tabellenverzeichnis

Literaturverzeichnis

[AlbMa05] Peter Albrecht, Raimond Maurer: ***Investment- und Risikomanagement***,
Schäffer-Poeschel Verlag Stuttgart, 2005, 2. Auflage,
ISBN: 3-7910-2431-0.

[Dill02] Tobias Dillmann: ***Modelle zur Bewertung von Optionen in Lebensversicherungsverträgen***,
Gesellschaft für Finanz- und Aktuarwissenschaften Ulm (Ifa-Ulm), 2002, 1. Auflage,
ISBN: 3-9312-8949-4.

[EStG06] ***Wichtige Steuergesetze*** *mit Durchführungsverordnung*,
Verlag Neue Wirtschafts-Briefe Herne/Berlin, 2006, 54. Auflage, *Einkommensteuergesetz*, Seiten 193 - 408,
ISBN: 3-482-53436-5,
Stand: 01. Januar 2006.

[EStG99] ***Einkommensteuergesetz***,
Deutscher Taschenbuch Verlag, 1999, 13. Auflage,
ISBN: 3-423-05542-1,
Stand: 01. April 1999.

[Fis06] Bernd Fischer: ***Versicherungsmathematik*** - *Vorlesungsmitschrift*,
Hochschule Mittweida, 2006.

[Ger97] Wolfgang Gerdes: ***Bewertung von Finanzoptionen in Lebensversicherungsprodukten***, Der Aktuar, 1997, Heft 3, Seiten 117 - 124.

[HaDiKa02] Wilfried Hausmann, Kathrin Diener, Joachim Käsler: ***Derivate, Arbitrage und Portfolio-Selection***, *Stochastische Finanzmarktmodelle und ihre Anwendungen*, Vieweg - Verlag, 2002, 1. Auflage,
ISBN: 3-528-03169-7.

[Hel04] Sonja Helbig: ***Wahrscheinlichkeitsrechnung und mathematische Statistik*** - *Vorlesungsmitschrift*,
Hochschule Mittweida, 2004.

[Her02] Hans-Otto Herr, ...: ***Implizite Finanzoptionen***,
Abschlussbericht zur Methodik der Bewertung von impliziten Finanzoptionen in Lebensversicherungsprodukten,
Themenfeld: „Produktanalyse und Bewertung“
Ausschuss für Finanzmathematik der DAV,
DGVM Schriftreihe: Angewandte Versicherungsmathematik 32, Verlag Versicherungswirtschaft Karlsruhe, 2004, 1. Auflage,
ISBN: 3-899-52147-4.

[Hul06] John C. Hull: ***Optionen, Futures und andere Derivate***,
Pearson Studium, 2006, 6. Auflage,
ISBN: 3-8273-7142-2.

[KrRe05] Maren Krüger, Michael Reiners: ***Implizite Optionen in Lebensversicherungen***,
http://www.mathematik.uni-dortmund.de/lsi/koch/Thema7.pdf,
Stand: Mai 2008.

[Loe94] Horst Loebus: ***Bestimmung einer angemessenen Sterbetafel für Lebensversicherungen mit Todesfallcharakter***,
Blätter DGVM, Band XXI, Heft 4, 1994.

[Pfei06] Andreas Pfeifer: ***Praktische Finanzmathematik***, *Mit Futures, Optionen, Swaps und anderen Derivaten*,

Verlag Harri Deutsch, 2006, 4. Auflage,
ISBN: 3-8171-1794-9.

[PfoSch90] Ernst-Adam Pforr, Winfried Schirotzek: ***Differential- und Integralrechnung für Funktionen mit einer Variablen***,
Mathematik für Ingenieure, Naturwissenschaftler, Ökonomen, Landwirte Band 2, BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, 1990, 8. Auflage,
ISBN: 3-322-00295-0.

[Web92] Hubert Weber: ***Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik für Ingenieure***,
B. G. Teubner Stuttgart, 1992, 3. Auflage,
ISBN: 3-519-02983-9.

[Weh98] Dirk C. Wehrmann: ***Strategien zur Absicherung ungewisser Verpflichtungen mit Transaktionskosten im Binomialmodell***,
Karlsruher Reihe: Beiträge zur Versicherungswissenschaft Band 4,
Verlag Versicherungswirtschaft Karlsruhe, 1998, 1. Auflage,
ISBN: 3-8848-736-4.

[Wolf97] Kurt Wolfsdorf: ***Versicherungsmathematik****, Teil 1 Personenversicherung*,
Teubner Studienbücher: Mathematik, 1997, 2. Auflage,
ISBN: 3-519-12072-0.

Eidesstattliche Erklärung

Hiermit erkläre ich, dass ich diese Arbeit selbstständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt habe.

Die Arbeit wurde bisher keinen anderen Prüfungsbehörde vorgelegt und auch noch nicht veröffentlicht.

Mittweida, 09.03.2009

Yvonne Kriener