

René Schwarz

EIN 3D-MODELL FÜR DIE SIMULATION VON  
TURBULENTEM WIND

DIPLOMARBEIT

HOCHSCHULE MITTWEIDA

---

UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

Fachbereich Mathematik/Physik/Informatik

Mittweida, 2009



René Schwarz

EIN 3D-MODELL FÜR DIE SIMULATION VON  
TURBULENTEM WIND

eingereicht als

DIPLOMARBEIT

an der

HOCHSCHULE MITTWEIDA

---

UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

Fachbereich Mathematik/Physik/Informatik

Chemnitz, 2009

Erstprüfer: Prof. Dr. rer. nat. Cordula Bernert, HS Mittweida  
Zweitprüfer: Dr. rer. nat. Uwe Jungnickel, Institut für Mechatronik e.V.

Vorgelegte Arbeit wurde verteidigt am: 27.08.2009



## Inhaltsverzeichnis

|          |   |           |
|----------|---|-----------|
| <b>1</b> | <b>Mathematische Grundlagen</b>                           | <b>11</b> |
| 1.1      | Stochastische Prozesse . . . . .                          | 11        |
| 1.1.1    | Definitionen . . . . .                                    | 11        |
| 1.1.2    | Momentenfunktionen . . . . .                              | 12        |
| 1.2      | Tensoren . . . . .  | 13        |
| 1.2.1    | Transformationen des Koordinatensystems . . . . .         | 13        |
| 1.2.2    | Tensoren . . . . .  | 13        |
| 1.3      | Diskrete Fourier-Transformation . . . . .                 | 15        |
| 1.3.1    | Eigenschaften der DFT . . . . .                           | 16        |
| 1.3.2    | Schnelle Fourier-Transformation . . . . .                 | 17        |
| 1.3.3    | Mehrdimensionale DFT . . . . .                            | 18        |
| <b>2</b> | <b>Sandia-Methode</b>                                     | <b>20</b> |
| <b>3</b> | <b>Verfahren von Mann</b>                                 | <b>23</b> |
| 3.1      | Definitionen . . . . .                                    | 23        |
| 3.2      | Isotropes Tensormodell . . . . .                          | 25        |
| 3.3      | Spektraltensor des anisotropen Turbulenzmodells . . . . . | 26        |
| 3.4      | Fourier-Simulation . . . . .                              | 29        |
| 3.5      | Probleme . . . . .  | 33        |
| 3.6      | Vergleich mit der Sandia-Methode . . . . .                | 34        |
| <b>4</b> | <b>Umsetzung</b>  | <b>35</b> |
| <b>5</b> | <b>Ergebnisse</b>   | <b>39</b> |
| 5.1      | Isotroper Fall . . . . .                                  | 39        |
| 5.2      | Anisotroper Fall . . . . .                                | 43        |
| 5.3      | Vergleich der beiden Simulationsmethoden . . . . .        | 49        |
| 5.4      | Fehlerdiskussion . . . . .                                | 51        |
| <b>A</b> | <b>Anhang</b>   | <b>55</b> |
| A.1      | ensemble average . . . . .                                | 55        |
| A.2      | Herleitung des isotropen Spektraltensors . . . . .        | 56        |
| <b>B</b> | <b>Bezeichnungen und Erklärungen</b>                      | <b>59</b> |
| B.1      | Bezeichnungen . . . . .                                   | 59        |
| B.2      | Erklärungen . . . . .                                     | 61        |

|  |           |
|--|-----------|
| <i>INHALTSVERZEICHNIS</i>                                | 6         |
| <b>C Tabellen</b>  | <b>64</b> |
| C.1 Wertetabellen für Windfelder über dem Meer . . . . . | 64        |
| C.2 Wertetabellen für Windfelder über Land . . . . .     | 65        |

## Abbildungsverzeichnis

|    |   |    |
|----|---|----|
| 1  | Zeitreihen in mittlerer Windrichtung (siehe [14]) . . . . .   | 20 |
| 2  | Änderung der Varianzen (siehe [1]) . . . . .  | 28 |
| 3  | Dreidimensionales Gebiet $B$ (siehe [1]) . . . . .  | 29 |
| 4  | Parameter des Spektraltensors über Meer (siehe [1]) . . . . .   | 35 |
| 5  | Parameter des Spektraltensors über Land (siehe [1]) . . . . .   | 36 |
| 6  | Programmablaufplan . . . . .  | 38 |
| 7  | Zeitreihen bei $y = 1, z = 1$ und $y = 2, z = 1$<br>(isotropes Beispiel) . . . . .                              | 41 |
| 8  | Zeitreihen bei $y = N_2 - 1, z = N_3$ und $y = N_2, z = N_3$<br>(isotropes Beispiel) . . . . .                  | 41 |
| 9  | Ausschnitt der Zeitreihen bei $y = 1, z = 1$ und $y = 2, z = 1$<br>(isotropes Beispiel) . . . . .               | 41 |
| 10 | Ausschnitt der Zeitreihen bei $y = N_2 - 1, z = N_3$ und<br>$y = N_2, z = N_3$ (isotropes Beispiel) . . . . .   | 41 |
| 11 | Zeitreihen bei Stellen $y = 1, z = 1$ und $y = 2, z = 1$<br>(anisotropes Beispiel) . . . . .                    | 44 |
| 12 | Zeitreihen bei $y = N_2 - 1, z = N_3$ und $y = N_2, z = N_3$<br>(anisotropes Beispiel) . . . . .                | 44 |
| 13 | Ausschnitt der Zeitreihen bei $y = 1, z = 1$ und $y = 2, z = 1$<br>(anisotropes Beispiel) . . . . .             | 45 |
| 14 | Ausschnitt der Zeitreihen bei $y = N_2 - 1, z = N_3$ und<br>$y = N_2, z = N_3$ (anisotropes Beispiel) . . . . . | 45 |
| 15 | Verhalten der Varianzen . . . . .   | 48 |
| 16 | Energiespektren . . . . .   | 51 |
| 17 | Abtastpunkte des Energiespektrums . . . . .   | 52 |





# Einleitung

Seit mehreren Jahren werden am Institut für Mechatronik Windkraftanlagen als Mehrkörpersysteme modelliert. Dabei ist es das Ziel, das Verhalten der einzelnen Bauteile und Baugruppen zu simulieren. Für diese Simulationen müssen die äußeren Belastungen, welche von der Umgebung auf die Windkraftanlage übertragen werden, selbst auch simuliert werden.

Bei den Windkraftanlagen wird zwischen Onshore- und Offshore-Windkraftanlagen unterschieden. Als Onshore-Windkraftanlagen bezeichnet man Windkraftanlagen, welche auf dem Land installiert werden. Im Gegensatz dazu werden Offshore-Windkraftanlagen küstennah in Gewässern aufgestellt. Die äußeren Belastungen sind für diese beiden Typen verschieden. Zum einen wirken bei Onshore-Windkraftanlagen nur die anliegenden Windkräfte auf die Anlage. Bei Offshore-Windkraftanlagen hingegen, gibt es neben den Windkräften, welche auf die Rotorblätter und den oberen Teil wirken, auch noch wellen- und strömungsinduzierte Kräfte, die am unteren Teil der Anlage anliegen. Wie diese wellen- und strömungsinduzierten Kräfte berechnet werden können, ist in der Diplomarbeit *Modellierung von Wasserwellen für die Berechnung von wellen- und strömungsinduzierter Lasten an Fundamenten von Offshore-Windkraftanlagen* von Matthias März zu finden.

Die für beide Anlagentypen benötigten Windlasten werden durch stochastische Windgeschwindigkeitsfelder erzeugt. In der Vergangenheit wurden diese Felder mit einem Verfahren von Paul S. Veers simuliert. Dieses Verfahren wird auch *Sandia-Methode* genannt. Ein weiteres Simulationsmodell wurde 1998 von Jakob Mann in der Zeitschrift *Probabilistic Engineering Mechanics* beschrieben. Dieses Verfahren wird in dieser Diplomarbeit betrachtet um eine Alternative zu dem Modell von Veers zu bieten.

Das Ziel der vorliegenden Arbeit ist es, das Modell von Mann zur Simulation von dreidimensionalen stochastischen Windfeldern vorzustellen, mit *MatLab* zu implementieren und mit dem Verfahren von Veers zu vergleichen. Dazu werden im ersten Abschnitt die benötigten mathematischen Grundlagen dargelegt. In Abschnitt 2 wird das Verfahren von Paul S. Veers vorgestellt. Die Beschreibung des Verfahrens von Jakob Mann erfolgt in Abschnitt 3 und dessen Umsetzung mit Hilfe von *MatLab* ist in Abschnitt 4 zu finden. Die erzielten Ergebnisse werden in Abschnitt 5 dargestellt und diskutiert. Außerdem ist in diesem Abschnitt ein Vergleich der Ergebnisse einer Simulation mit beiden Verfahren beschrieben. Im Anhang sind ergänzende Erklärungen, eine Übersicht der verwendeten Bezeichnungen und verschiedene Wertetabellen zu finden.



# 1 Mathematische Grundlagen

## 1.1 Stochastische Prozesse

### 1.1.1 Definitionen

Unter einem **stochastischen Prozess**  $X_T$  versteht man eine Familie von reell- oder komplexwertigen Zufallsgrößen  $\{X(t); t \in T\}$  über einem gemeinsamen Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, E, P)$  (siehe [26]), wobei die Parametermenge  $T$  eine Teilmenge der reellen Zahlen ist.

Seien nun  $n \in \mathbb{N}^+$  und  $t_1 < \dots < t_n$  beliebige Werte aus  $T$ , so wird

$$F_{t_1, \dots, t_n}(x_1, \dots, x_n) = P(X(t_1) \leq x_1, \dots, X(t_n) \leq x_n)$$

eine **n-dimensionale Verteilungsfunktion des Prozesses**  $X_T$  genannt. Diese Verteilungsfunktion gehört zu dem zufälligen Vektor  $(X(t_1), \dots, X(t_n))$ . Werden alle n-dimensionalen Verteilungsfunktionen für beliebiges  $n$  und beliebige Zeitpunkte  $t_1, \dots, t_n$  betrachtet, so heißt die Menge dieser Verteilungsfunktionen **endlich-dimensionale Verteilungsfunktion von  $X_T$** . Die endlich-dimensionalen Verteilungsfunktionen erfüllen die *Verträglichkeitsbedingungen*:

$$\begin{aligned} F_{t_1, \dots, t_n}(x_1, \dots, x_n) &= F_{t_{i_1}, \dots, t_{i_n}}(x_{i_1}, \dots, x_{i_n}) \\ \lim_{x_n \rightarrow \infty} F_{t_1, \dots, t_n}(x_1, \dots, x_n) &= F_{t_1, \dots, t_{n-1}}(x_1, \dots, x_{n-1}) \end{aligned}$$

Dabei ist  $(i_1, \dots, i_n)$  eine Permutation der Indizes  $(1, \dots, n)$ .

Ein Prozess  $X(t)$ ,  $t \in T = \mathbb{R}$  heißt **stationär im engeren Sinne**, falls für dessen endlich-dimensionale Verteilungsfunktion gilt:

$$F_{t_1+h, \dots, t_n+h}(x_1, \dots, x_n) = F_{t_1, \dots, t_n}(x_1, \dots, x_n), \quad \forall h \in \mathbb{R}.$$

Wenn ein stochastischer Prozess  $X_T$  endlich-dimensionale Verteilungen besitzt, welche alle Normalverteilungen sind, so wird dieser Prozess **Gauß'scher Prozess** genannt.

Existieren für  $F_{t_1, \dots, t_n}$  die partiellen Ableitungen und sind diese stetig, so nennt man

$$f_{t_1, \dots, t_n}(x_1, \dots, x_n) = \frac{\partial^n}{\partial x_1 \dots \partial x_n} F_{t_1, \dots, t_n}(x_1, \dots, x_n)$$

die **n-dimensionale Dichte**. Für einen Gauß'schen Prozess gilt:

$$f_{t_1, \dots, t_n}(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \det K}} e^{-1/2(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})^T K^{-1}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})},$$

wobei  $\mu = (\mu_1 = EX(t_1), \dots, \mu_n = EX(t_n))^T$  und

$$K = \begin{pmatrix} \text{cov}(X(t_1), X(t_1)) & \dots & \text{cov}(X(t_1), X(t_n)) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \text{cov}(X(t_n), X(t_1)) & \dots & \text{cov}(X(t_n), X(t_n)) \end{pmatrix}$$

die Kovarianzmatrix von  $(X(t_1), \dots, X(t_n))^T$  ist.

### 1.1.2 Momentenfunktionen

Die Funktion  $m_X(t) = EX(t)$ ,  $t \in T$  wird **Erwartungswertfunktion** genannt. Weil ein stochastischer Prozess  $X(t)$  für ein festes  $t$  eine Zufallsgröße ist und  $EX(t)$  der zugehörige Erwartungswert, übertragen sich alle bekannten Eigenschaften für Erwartungswerte von Zufallsgrößen auf  $m_X(t)$ .

Als **Kovarianzfunktion** von  $X(t)$  wird  $\gamma_X(s, t) = \text{cov}(X(s), X(t))$  bezeichnet. Hierbei können wieder alle Eigenschaften der Kovarianz auf diese Funktion übertragen werden. Die **Korrelationsfunktion** von  $X(t)$  lautet:

$$r_X(s, t) = \frac{\gamma_X(s, t)}{\sqrt{\gamma_X(s, s)\gamma_X(t, t)}}.$$

Dabei heißt  $\sigma_X^2(t) = \gamma_X(t, t)$  **Varianzfunktion** von  $X(t)$ .

Wenn für einen Prozess  $X(t)$  gilt  $EX^2(t) < \infty$ ,  $\forall t \in T$ , dann ist dies ein *Prozess zweiter Ordnung*. Die eingeführten Momentenfunktionen existieren alle für Prozesse zweiter Ordnung.

Gilt für die Korrelationsfunktion eines stochastischen Prozesses  $X(t)$  zweiter Ordnung  $\gamma_X(s, t) = \gamma(\tau)$ ,  $\tau = t - s$  und für die Erwartungswertfunktion  $m_X(t) = c$ , so heißt  $X(t)$  **stationär im weiteren Sinne**. Für einen Prozess zweiter Ordnung folgt immer aus der Stationarität im engeren Sinne die Stationarität im weiteren Sinne. Falls es sich um einen Gauß'schen Prozess handelt, so gilt auch die Umkehrung.

Wenn  $X(t)$ ,  $t \in T = \mathbb{R}$  ein im weiteren Sinne stationärer Prozess ist mit der Eigenschaft  $\int_{-\infty}^{\infty} |\gamma(\tau)| d\tau < \infty$ , so existiert die Funktion

$$S(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega\tau} \gamma(\tau) d\tau, \quad \forall \omega \in \mathbb{R}$$

und wird als **Spektraldichte** von  $X(t)$  bezeichnet.

Seien nun  $X(t)$  und  $Y(t)$ ,  $t \in T = \mathbb{R}$  zwei stochastische Prozesse über dem gleichen Wahrscheinlichkeitsraum, dann heißen

$$\gamma_{XY}(s, t) = \text{cov}(X(s), Y(t))$$

**Kreuzkovarianzfunktion** und

$$r_{XY}(s, t) = \frac{\gamma_{XY}(s, t)}{\sqrt{\gamma_X(s, s)\gamma_Y(t, t)}} = \frac{\gamma_{XY}(s, t)}{\sigma_X(s)\sigma_Y(t)}$$

**Kreuzkorrelationsfunktion** dieser beiden Prozesse. Im Allgemeinen gelten hier aber nicht die Eigenschaften der Kovarianz- oder Korrelationsfunktion.

## 1.2 Tensoren

### 1.2.1 Transformationen des Koordinatensystems

In einem dreidimensionalen Raum wird eine affine Koordinatentransformation durch eine lineare Transformation beschrieben.

$$\tilde{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}, \det(A) \neq 0$$

$$\tilde{x}_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3$$

$$\tilde{x}_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3$$

$$\tilde{x}_3 = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3$$

Bei dieser linearen Transformation sind die Vektoren  $\tilde{\mathbf{x}}$  und  $\mathbf{x}$  Koordinaten für den selben Punkt, beziehen sich aber jeweils auf verschiedene Koordinatensysteme  $\tilde{K}$  und  $K$ .

### 1.2.2 Tensoren

Eine Größe  $\mathbf{T}$  kann in einem kartesischen Koordinatensystem  $K$  durch  $3^n$  Elemente  $t_{ij\dots m}$  beschrieben werden. Die Elemente  $t_{ij\dots m}$  sind dabei translationsinvariant. Die Anzahl der Indizes  $i, j, \dots, m$  ist  $n$  ( $n \geq 0$ ). Die Indizes sind geordnet und jeder Index läuft über 1, 2, 3. Gilt dann für die Elemente  $t_{ij\dots m}$  bei einer Transformation des Koordinatensystems  $K$  nach  $\tilde{K}$

$$\tilde{t}_{\mu\nu\dots\rho} = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \cdots \sum_{m=1}^3 a_{\mu i} a_{\nu j} \cdots a_{\rho m} t_{ij\dots m},$$

so wird  $\mathbf{T}$  als **Tensor n-ter Stufe** bezeichnet. Die Elemente  $t_{ij\dots m}$  mit geordneten Indizes sind hierbei die *Komponenten des Tensors  $\mathbf{T}$* .

Seien nun  $e_i$  und  $\tilde{e}_i$  die Basisvektoren von  $K$  und  $\tilde{K}$ . Des Weiteren sind  $x^i$  und  $\tilde{x}^i$  affine Koordinaten eines Vektors  $x = \sum_{i=1}^3 x^i e_i = \sum_{i=1}^3 \tilde{x}^i \tilde{e}_i$ .

Ein Tensor heißt *n-fach kontravariant*, wenn er sich wie die affinen Koordinaten transformiert, was bedeutet:

$$\tilde{x}^i = \sum_{j=1}^3 a_j^i x^j, \quad a_j^i = \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^j},$$

und er heißt *n-fach kovariant*, wenn er sich wie die Basisvektoren transformiert:

$$\tilde{e}_i = \sum_{j=1}^3 a_i^j e_j, \quad a_i^j = \frac{\partial x^j}{\partial \tilde{x}^i}.$$

Mischformen aus beiden Varianten sind ebenfalls möglich.

### Tensor nullter Stufe

Ein Tensor *nullter Stufe* besteht aus nur einer Komponente und ist somit ein Skalar.

### Tensor erster Stufe

Ein Tensor *erster Stufe* hat die drei Komponenten  $t_1$ ,  $t_2$  und  $t_3$ . Für das Transformationsgesetz folgt:

$$\tilde{t}_\mu = \sum_{i=1}^3 a_{\mu i} t_i, \quad \mu = 1, 2, 3.$$

Da dies gerade das Transformationsgesetz für Vektoren ist, folgt, dass ein Vektor ein Tensor erster Stufe ist.

### Tensor zweiter Stufe

Für  $n = 2$  besitzt der Tensor  $\mathbf{T}$  neun Komponenten. Diese lassen sich in Form einer Matrix anordnen.

$$\mathbf{T} = T = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{pmatrix}$$

Das Transformationsgesetz lautet hier:

$$\tilde{t}_{\mu\nu} = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 a_{\mu i} a_{\nu j} t_{ij}, \quad \mu, \nu = 1, 2, 3$$

Jeder Tensor zweiter Stufe lässt sich somit als Matrix darstellen.

### 1.3 Diskrete Fourier-Transformation

Ausgangspunkt der diskreten Fourier-Transformation (DFT) ist die Definition der Fourier-Transformation.

Dabei muss zwischen periodischen und nichtperiodischen Funktionen unterschieden werden. Für eine periodische Funktion  $f(x)$  mit der Periode  $T$  nutzt man die Zerlegung in eine Fourier-Reihe:

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\omega x}$$

$$c_k = \frac{1}{T} \int_0^T f(x) e^{-ik\omega x} dx.$$

Diese Fourier-Reihe konvergiert, wenn die *Dirichletschen Bedingungen* erfüllt sind.

Bei einer nichtperiodischen Funktion  $f(t)$  erfolgt die Zerlegung in das Fourier-Integral anstatt in eine Fourier-Reihe.

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{i\omega(t-\tau)} d\omega d\tau$$

Die Bedingung für die Konvergenz des Fourier-Integrals ist das *Kriterium von Dirichlet-Jordan*.

Die Fourier-Transformation entsteht aus dem Fourier-Integral durch Substitution des inneren Integrals.

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau$$

Diese beiden Funktionen bilden ein Transformationspaar, was durch  $f(t) \circ\!\!\!\rightarrow F(\omega)$  symbolisiert wird, wobei  $f(t)$  eine Funktion im Zeitbereich und  $F(\omega)$  die zugehörige Fourier-Transformierte im Frequenz- oder Spektralbereich ist.

Um von einer Fourier-Reihe zu einer diskreten Fourier-Transformation zu gelangen, wird die Summation auf einen Bereich der Länge  $N$  beschränkt. Der Übergang vom Fourier-Integral zur Summendarstellung der diskreten

Fourier-Transformation erfolgt durch das zeitliche Beschränken und Abtasten der Funktion im Zeitbereich. Diese beiden Schritte werden im Englischen als *windowing* und *sampling* bezeichnet. Das Transformationspaar der diskreten Fourier-Transformation hat die folgende Form:

$$g(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} G(n) e^{2\pi i * kn/N}, \quad 0 \leq k \leq N-1$$

$$G(n) = \sum_{k=0}^{N-1} g(k) e^{-2\pi i * kn/N}, \quad 0 \leq n \leq N-1.$$

### 1.3.1 Eigenschaften der DFT

Die folgenden Eigenschaften der diskreten Fourier-Transformation sind aus den Eigenschaften des Fourier-Integrals abgeleitet, welche durch die Diskretisierung nicht verändert werden.

#### Linearität

Wenn  $G(n)$  und  $H(n)$  die Fourier-Transformierten von  $g(k)$  und  $h(k)$  sind und  $a, b \in \mathbb{R}$  gilt, dann folgt:

$$ag(k) + bh(k) \circ \bullet aG(n) + bH(n).$$

#### Periodizität

Für die Erläuterung der Periodizität wird  $W_N := e^{-2\pi i/N}$  eingeführt. Hierbei wird  $W_N$  als *Drehfaktor* bezeichnet und  $W_N^k$  ist  $N$ -periodisch. Für  $k = N$  gilt:  $W_N^N = 1$ . Durch Einsetzen in die Definition der DFT entsteht:

$$g(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} G(n) W_N^{-kn}, \quad 0 \leq k \leq N-1,$$

$$G(n) = \sum_{k=0}^{N-1} h(k) W_N^{kn}, \quad 0 \leq n \leq N-1.$$

Hieraus folgt, dass  $g(k) = g(k + N)$  und  $G(n) = G(n + N)$  gilt.

#### Verschiebung

Wird die Funktion im Zeitbereich um  $m$  Punkte verschoben, so gilt:

$$g(k - m) \circ \bullet e^{-im} G(n), \quad m \in \mathbb{N}.$$

Analog dazu folgt für eine Verschiebung im Spektralbereich:

$$e^{ikm} g(k) \circ \bullet G(n - m), \quad m \in \mathbb{N}.$$



**Faltung (Faltungstheorem)**

Für das Produkt zweier Funktionen  $g(k)$  und  $h(k)$  im Zeitbereich ergibt sich die Faltung ihrer Fourier-Transformierten im Spektralbereich:

$$g(k)h(k) \circ \bullet \frac{1}{N}(G * H)(n),$$

wobei  $(G * H)(n) := \sum_{p=0}^{N-1} G(p)H(n-p)$  ist. Für die Umkehrung gilt:

$$(g * h)(k) \circ \bullet G(n)H(n).$$

**Symmetrie**

Für das Fourier-Transformationspaar  $g(k) \circ \bullet G(n)$  gilt:

$$\frac{1}{N}G(k) \circ \bullet g(-n).$$

**1.3.2 Schnelle Fourier-Transformation**

Die schnelle Fourier-Transformation, auch *FFT (Fast Fourier-Transformation)* genannt, ist die Bezeichnung für verschiedene Algorithmen zur Berechnung der diskreten Fourier-Transformation. Beispiele für die verschiedenen Varianten sind der Algorithmus von Cooley und Tukey, der Radix-4-Algorithmus und der Primfaktor-Algorithmus. Der Algorithmus von Cooley und Tukey, welcher auch Radix-2-Algorithmus genannt wird, ist in Form von Pseudocode unter Algorithmus 1 zu finden. Voraussetzung für diesen Algorithmus ist:  $N = 2^m$ ,  $m \in \mathbb{N}$ .

---

**Algorithmus 1** Cooley-Tukey-Algorithmus

---

```
function FFT(N, g) mit g = (g0, ..., gN-1)
if N = 1 then
  return g
else
  f = FFT(N/2, (g0, g2, ..., gN-2))
  h = FFT(N/2, (g1, g3, ..., gN-1))
  for k = 0 to N/2 - 1 do
    Gk = fk + hk * e-2πik/N
    Gk+N/2 = fk - hk * e-2πik/N
  end for
end if
return G
```

---

### 1.3.3 Mehrdimensionale DFT

Die diskrete Fourier-Transformation ist nicht auf den eindimensionalen Fall beschränkt. Es ist möglich, die DFT auf mehrere Dimensionen zu erweitern. Für eine zweidimensionale diskrete Fourier-Transformation der Größe  $N_1 \times N_2$  gilt:

$$X(k_1, k_2) = \sum_{m_1=0}^{N_1-1} \sum_{m_2=0}^{N_2-1} x(m_1, m_2) e^{-2\pi i m_1 k_1 / N_1} e^{-2\pi i m_2 k_2 / N_2}, \quad (1.1)$$

$$\begin{aligned} k_1 &= 0, \dots, N_1 - 1 \\ k_2 &= 0, \dots, N_2 - 1. \end{aligned}$$

Durch Umsortieren von Gleichung (1.1) ergibt sich:

$$X(k_1, k_2) = \sum_{m_1=0}^{N_1-1} e^{-2\pi i m_1 k_1 / N_1} \sum_{m_2=0}^{N_2-1} x(m_1, m_2) e^{-2\pi i m_2 k_2 / N_2}.$$

Aus dieser Gleichung ist zu erkennen, dass die zweidimensionale DFT in zwei Rechenschritte zerlegt werden kann. Als Erstes berechnet man  $N_1$  DFTs der Länge  $N_2$  mit  $Y(m_1, k_2)$ , was  $N_1$  verschiedenen Werten von  $m_1$  entspricht.

$$Y(m_1, k_2) = \sum_{m_2=0}^{N_2-1} x(m_1, m_2) e^{-2\pi i m_2 k_2 / N_2}$$

Mit diesem Ergebnis wird der zweite Rechenschritt ausgeführt. Es werden  $N_2$  DFTs der Länge  $N_1$  berechnet mit  $X(k_1, k_2)$ , was wiederum  $N_2$  verschiedenen Werten von  $k_2$  entspricht und es gilt:

$$X(k_1, k_2) = \sum_{m_1=0}^{N_1-1} Y(m_1, k_2) e^{-2\pi i m_1 k_1 / N_1}. \quad (1.2)$$

Dieser Ansatz wird *row-column-Methode* („Zeile-Spalte“-Methode) genannt, weil er mit dem Ablegen der Eingangsdaten in einer Menge von Zeilen- und Spaltenvektoren in einem Array der Größe  $N_1 \times N_2$  verglichen werden kann. Dabei werden dann der Reihe nach erst die DFTs der Spalten und danach die DFTs der Zeilen ausgeführt. Durch diese Variante wird eine zweidimensionale diskrete Fourier-Transformation in  $N_1$  eindimensionale diskrete Fourier-Transformationen von  $N_2$  Eingangsdaten plus  $N_2$  eindimensionale diskrete Fourier-Transformationen von  $N_1$  Eingangsdaten zerlegt.

Dieses Vorgehen kann analog auf eine dreidimensionale diskrete Fourier-Transformation angewandt werden. Die Ausgangsgleichung hat hierbei in Analogie zu Gleichung (1.1) die Form:

$$X(k_1, k_2, k_3) = \sum_{m_1=0}^{N_1-1} \sum_{m_2=0}^{N_2-1} \sum_{m_3=0}^{N_3-1} x(m_1, m_2, m_3) e^{\frac{-2\pi i m_1 k_1}{N_1}} e^{\frac{-2\pi i m_2 k_2}{N_2}} e^{\frac{-2\pi i m_3 k_3}{N_3}}, \quad (1.3)$$

mit  $k_1 = 0, \dots, N_1 - 1$ ,  $k_2 = 0, \dots, N_2 - 1$  und  $k_3 = 0, \dots, N_3 - 1$ . Sortiert man die Gleichung wieder um, entsteht:

$$X(k_1, k_2, k_3) = \sum_{m_1=0}^{N_1-1} e^{\frac{-2\pi i m_1 k_1}{N_1}} \sum_{m_2=0}^{N_2-1} e^{\frac{-2\pi i m_2 k_2}{N_2}} \sum_{m_3=0}^{N_3-1} x(m_1, m_2, m_3) e^{\frac{-2\pi i m_3 k_3}{N_3}}.$$

Diese Gleichung kann in 3 Rechenschritten gelöst werden:

$$\begin{aligned} Y(m_1, m_2, k_3) &= \sum_{m_3=0}^{N_3-1} x(m_1, m_2, m_3) e^{-2\pi i m_3 k_3 / N_3}, \\ Z(m_1, k_2, k_3) &= \sum_{m_2=0}^{N_2-1} Y(m_1, m_2, k_3) e^{-2\pi i m_2 k_2 / N_2}, \\ X(k_1, k_2, k_3) &= \sum_{m_1=0}^{N_1-1} Z(m_1, k_2, k_3) e^{-2\pi i m_1 k_1 / N_1}. \end{aligned}$$

Bei diesen Rechenschritten werden für die erste Richtung  $N_2 N_3$  eindimensionale diskrete Fourier-Transformationen mit  $N_1$  Eingangsdaten, für die zweite Richtung  $N_1 N_3$  eindimensionale DFTs mit  $N_2$  Eingangsdaten und für die dritte Richtung  $N_1 N_2$  eindimensionale DFTs mit  $N_3$  Eingangsdaten gebraucht. Somit kann eine dreidimensionale DFT durch  $N_1 N_2 + N_1 N_3 + N_2 N_3$  eindimensionale diskrete Fourier-Transformationen berechnet werden.

Mit dieser Methode lassen sich sämtliche mehrdimensionale diskrete Fourier-Transformationen und mehrdimensionale inverse diskrete Fourier-Transformationen auf eindimensionale DFTs beziehungsweise inverse DFTs zurückführen, welche durch die schnelle Fourier-Transformation berechnet werden können.

## 2 Sandia-Methode

In diesem Abschnitt wird die *Sandia-Methode* von Paul S. Veers vorgestellt (siehe [14] und [15]). Es handelt sich um ein Verfahren zur Erzeugung eines Windfeldes und es basiert auf der Methode von Shinozuka und Jan, welche in [4] beschrieben wird.

Der Ansatz bei diesem Verfahren ist die Simulation von Zeitreihen an  $N$  verschiedenen Punkten in einer Normalenebene zur mittleren Windrichtung. In Abbildung 1 ist diese Methode angedeutet.

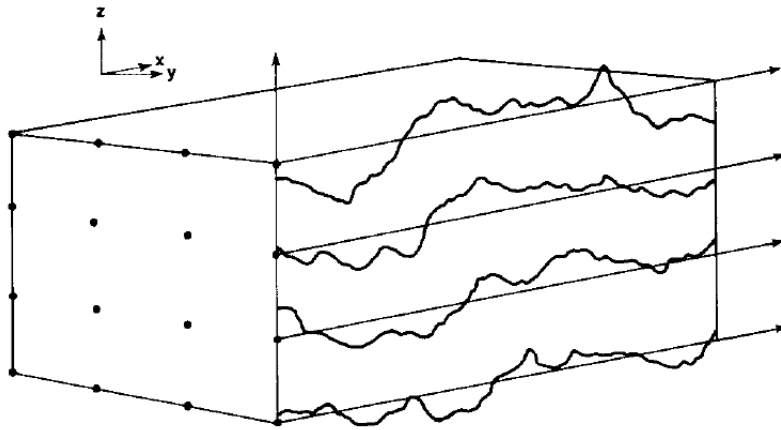


Abbildung 1: Zeitreihen in mittlerer Windrichtung

Es werden dabei  $N$  korrelierte Zeitreihen, basierend auf der Spektralmatrix  $S$ , erzeugt. Die Hauptdiagonalelemente von  $S$  sind die spektralen Leistungsdichten. Die restlichen Elemente  $S_{ij}$  stehen für die Kreuzspektraldichten zwischen je zwei Punkten  $i$  und  $j$  mit  $i, j \in \{1, \dots, N\}$ .

Für die numerische Simulation wird eine diskrete Darstellung jedes Elementes der Spektralmatrix  $S$  benötigt. Dabei wird die stetige, einseitige spektrale Leistungsdichte  $G_{jj}(f)$  im Punkt  $j$  durch die Einteilung in  $M/2$  Frequenzbänder der Breite  $\Delta f$  mit der Frequenz  $f_m$  diskretisiert;  $m = 1, \dots, M/2$ . Unter der Annahme, dass  $S_{jj}(f_m)$  ebenfalls eine einseitige spektrale Leistungsdichte ist, gilt  $S_{jj}(f_m) = G_{jj}(f_m)\Delta f$ ; anderenfalls gilt  $S_{jj}(f_m) = G_{jj}(f_m)\Delta f/2$ .

$$f_m = m\Delta f, \quad f_{max} = M/2\Delta f$$

Die Kreuzspektraldichte zwischen den Punkten  $i$  und  $j$  kann durch die spektrale Leistungsdichte und die Kohärenzfunktion  $coh_{ij}$  definiert werden.

$$S_{ij}(f_m) = coh_{ij}(f_m, \Delta r_{ij}) \sqrt{S_{ii}(f_m) S_{jj}(f_m)}$$

Die Kohärenzfunktion ist hierbei eine Funktion von der Frequenz  $f_m$  und dem Abstand  $\Delta r_{ij}$  zwischen den Punkten  $i$  und  $j$ . Durch die Annahme, dass es zwischen je zwei Punkten eine durchschnittliche Phasenverschiebung von 0 gibt, folgt, dass die Imaginärteile der Kreuzspektraldichten gleich 0 sind. Somit lässt sich die gesamte Spektralmatrix definieren durch die spektralen Leistungsdichten und die Kohärenzfunktion.

Die  $N$  korrelierten Zeitreihen können durch Linearkombination von  $N$  unabhängigen, stochastischen Prozessen (weißes Rauschen) erzeugt werden. Die Matrix  $S$  kann als das Produkt einer Transformationsmatrix  $H$  und der Transponierten ihrer komplex konjugierten geschrieben werden.

$$S(f_m) = H(f_m) H^{*T}(f_m) \quad (2.1)$$

Bei dieser Schreibweise ist jeder Eintrag der Matrizen  $S$  und  $H$  eine Funktion der Frequenz. Die Elemente der Matrix  $H$  sind nicht eindeutig definiert, weil  $H$   $N^2$  verschiedene Einträge besitzt,  $S$  jedoch nur  $(N^2 + N)/2$  aufgrund der Symmetrie der Kreuzspektraldichten. Nimmt man nun  $H$  als eine untere Dreiecksmatrix an, können deren Elemente durch eine Menge von rekursiven Gleichungen definiert werden.

$$\begin{aligned} H_{11} &= S_{11}^{1/2} \\ H_{21} &= S_{21}/H_{11} \\ &\vdots \\ H_{ij} &= \left( S_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} H_{ik} H_{jk} \right) / H_{jj} \\ H_{jj} &= \left( S_{jj} - \sum_{k=1}^{j-1} H_{jk}^2 \right)^{1/2} \end{aligned}$$

Durch diese Definition ist  $H$  reell, wenn  $S$  eine reellwertige Matrix ist und es folgt somit  $H^* = H$ . Die einzelnen Elemente der Matrix  $H$  können als Wichtungsfaktoren für die Linearkombinationen der  $N$  unabhängigen, stochastischen Prozesse (weißes Rauschen) betrachtet werden.

Die unabhängigen, stochastischen Prozesse sind in einer Diagonalmatrix  $X$

der Größe  $N \times N$  enthalten. Für die Elemente von  $X$  gilt:

$$X_{jk}(f_m) = \begin{cases} e^{i\varphi_{km}} & , \text{ falls } j = k \\ 0 & , \text{ falls } j \neq k \end{cases} \quad (2.2)$$

Dabei ist  $\varphi_{km}$  der Phasenwinkel der zum  $k$ -ten Punkt gehörigen  $m$ -ten Frequenzkomponente. Des Weiteren ist  $\varphi_{km}$  eine gleichverteilte Zufallsvariable aus dem Intervall  $(0, 2\pi)$ . Dadurch ist gesichert, dass sich die Zeitreihen einem Gauß'schen Prozess annähern, wenn es eine große Anzahl von Frequenzkomponenten gibt.

Die Gleichung für die komplexen Koeffizienten der simulierten Windgeschwindigkeiten lässt wie folgt angeben:

$$C_j(f_m) = \sum_{k=1}^j \sqrt{2\Delta f} H_{jk}(f_m) X_{kk}(f_m) = \sum_{k=1}^j \sqrt{2\Delta f} H_{jk}(f_m) e^{i\varphi_{km}}. \quad (2.3)$$

Eine Erläuterung des Faktors  $\sqrt{2\Delta f}$  ist in [25] zu finden. Durch die Form von  $X$  ist der Effekt, den diese Matrix hat, dass auf jede Spalte der Matrix  $H$  eine zufällige Phase angewandt wird. Aus der Gleichung (2.3) ist zu erkennen, dass  $C_j$  nur von den Eingangsdaten vorangehender Punkte ( $k \leq j$ ), welche durch  $H_{jk}$  gewichtet sind, abhängt.

Für Geschwindigkeitsschwankungen im Punkt  $j$  ergibt sich die folgende Gleichung, welche mittels inverser FFT gelöst wird.

$$\begin{aligned} u_j &= \sum_{m=1}^{M/2} C_j(f_m) e^{i\omega_m t} \\ &= \sum_{m=1}^{M/2} e^{i\omega_m t} \sum_{k=1}^j \sqrt{2\Delta f} H_{jk}(f_m) e^{i\varphi_{km}}, \quad j = 1, \dots, N \end{aligned}$$

Für die inverse FFT werden zusätzlich die Werte für die Indizes  $-M/2$  bis  $-1$  genutzt, wobei diese die konjugiert komplexen Werte der obigen Summanden sind. Durch diese Symmetrie entsteht nach der inversen FFT ein reeller Vektor der Länge  $M$ .

Um ein dreidimensionales Windgeschwindigkeitsfeld mit drei Schwankungskomponenten  $u$ ,  $v$  und  $w$  zu simulieren, muss die dargestellte Vorgehensweise für jede dieser Komponenten angewandt werden. Dabei werden die spektralen Leistungsdichten jeder Schwankungskomponente angepasst. Dies geschieht meist in der Form, dass die Koeffizienten der spektralen Leistungsdichten für jede Schwankungskomponente verändert werden. Nutzt man für  $u$ ,  $v$  und  $w$  die gleichen Koeffizienten, entsteht ein isotropes Windfeld, werden jedoch unterschiedliche Koeffizienten genutzt, ergibt sich ein anisotropes Windfeld.

### 3 Verfahren von Mann

Im folgenden Abschnitt wird das von Mann in [1] und [2] vorgestellte Verfahren zur Berechnung eines Windfeldes erläutert und hergeleitet.

#### 3.1 Definitionen

Ein zeitunabhängiges turbulentes Geschwindigkeitsfeld wird mit  $\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{U} + \mathbf{u}(\mathbf{x})$  erzeugt. Dabei sind  $\mathbf{x} = (x, y, z)^T$  die Komponenten in einem Rechtssystem, in dem die  $x$ -Achse in die Hauptwindrichtung zeigt und die  $z$ -Achse die vertikale Achse ist und  $\mathbf{u}(\mathbf{x}) = (u_1, u_2, u_3) = (u, v, w)$  sind die Schwankungen um den mittleren Wind  $\mathbf{U} = (U(z), 0, 0)^T$ .

Mit Hilfe der *Taylor Hypothese*, welche gültig ist, wenn  $u/U(z) \ll 1$  gilt, werden die Zeitreihen als räumliche Reihen interpretiert. Die Abhängigkeit von der Zeit  $t$  ist dann in der  $x$ -Komponente wiederzufinden in der Form  $\tilde{\mathbf{u}}(x, y, z, t) = \hat{\mathbf{u}}(x - Ut, y, z, 0)$ .

Die Schwankungen  $\mathbf{u}(\mathbf{x})$  um den mittleren Wind werden als homogen im Raum angenommen. Der Geschwindigkeitskorrelationstensor für zwei Punkte mit dem Abstandsvektor  $\mathbf{r}$  ist auf Grund dieser Homogenität:

$$R_{ij}(\mathbf{r}) = \langle u_i(\mathbf{x})u_j(\mathbf{x} + \mathbf{r}) \rangle. \quad (3.1)$$

Dabei steht  $\langle \rangle$  für das *ensemble average*.

Der Geschwindigkeitsvektor  $u_i(\mathbf{x})$  an einem Punkt im Raum kann als Zufallsvariable angesehen werden. Gibt es nun eine große Anzahl identischer Experimente, so dass  $u_i^{(n)}(\mathbf{x})$  in jedem Experiment identisch verteilt ist, dann kann das *ensemble average* angegeben werden durch:

$$\langle u_i(\mathbf{x}) \rangle = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N u_i^{(n)}(\mathbf{x}).$$

Da bei dem hier betrachteten Verfahren nur eine Realisierung eines solchen Experimentes als Ergebnis vorliegt, lässt sich die obige Gleichung vereinfachen zu:

$$\langle u_i(\mathbf{x}) \rangle = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N u_i(\mathbf{x}_n), \quad N = N_1 N_2 N_3.$$

Eine alternative Definition des *ensemble average* ist in Anhang A.1 zu finden.

Durch eine dreidimensionale Fourier-Transformation des Tensors  $R_{ij}(\mathbf{r})$  entsteht der Spektraltensor:

$$\Phi_{ij}(\mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} R_{ij}(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} dr_1 dr_2 dr_3. \quad (3.2)$$

Die Variable  $\mathbf{k} \in \mathbb{R}^3$  bezeichnet dabei den Wellenvektor, wobei die Komponente  $k_1 = 2\pi f/U$  für die Wellenzahl steht. Die stochastischen Schwankungen des Geschwindigkeitsfeldes können wie folgt dargestellt werden:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \int e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} d\mathbf{Z}(\mathbf{k}). \quad (3.3)$$

Hierbei sind die zufälligen Zuwächse  $d\mathbf{Z}(\mathbf{k})$  für verschiedene Werte von  $\mathbf{k}$  unkorreliert und es wird über alle Werte von  $\mathbf{k}$  integriert. Das stochastische Vektorfeld  $\mathbf{Z}$  ist mit dem Spektraltensor verbunden über:

$$\langle dZ_i^*(\mathbf{k}) dZ_j(\mathbf{k}) \rangle = \Phi_{ij}(\mathbf{k}) dk_1 dk_2 dk_3. \quad (3.4)$$

Diese Beziehung ist für infinitesimal kleine  $dk_i$  gültig. Da es sehr schwierig ist, den Spektraltensor direkt zu messen, werden die Kreuzspektren, welche oft in praktischen Anwendungen genutzt werden, definiert als:

$$\chi_{ij}(k_1, \Delta y, \Delta z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_{ij}(x, \Delta y, \Delta z) e^{-ik_1 x} dx.$$

Zwischen den Komponenten der Kreuzspektren und des Spektraltensors besteht folgender Zusammenhang:

$$\chi_{ij}(k_1, \Delta y, \Delta z) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{ij}(\mathbf{k}) e^{i(k_2 \Delta y + k_3 \Delta z)} dk_2 dk_3. \quad (3.5)$$

Für die Ein-Punkt-Spektren gilt:  $F_i(k_1) = \chi_{ii}(k_1, 0, 0)$ ,  $i = 1, 2, 3$ .

Die Kohärenzfunktion wird definiert als:

$$coh_{ij}(k_1, \Delta y, \Delta z) = \frac{|\chi_{ij}(k_1, \Delta y, \Delta z)|^2}{F_i(k_1) F_j(k_1)}. \quad (3.6)$$

Um zwischen den Spektren als Funktion der Wellenzahl  $k_1 = 2\pi f/U$  und der Frequenz zu unterscheiden, wird für das erste  $F(k_1)$  und für das zweite  $S(f)$  benutzt, das heißt  $S_i(f) df = F_i(k_1) dk_1$ .



### 3.2 Isotropes Tensormodell

Zunächst wird das isotrope Tensormodell betrachtet, weil für isotrope Turbulenzen gilt, dass die statistischen Eigenschaften der mittleren Geschwindigkeitsschwankungen überall im Geschwindigkeitsfeld gleich und von der betrachteten Richtung unabhängig sind.

Der Spektraltensor für isotrope Turbulenzen (Herleitung siehe Anhang A.2) lautet:

$$\Phi_{ij}(\mathbf{k}) = \frac{E(k)}{4\pi k^4} (\delta_{ij} k^2 - k_i k_j), \quad k = \|\mathbf{k}\|. \quad (3.7)$$

Das Energiespektrum  $E(k)$  wird dabei oftmals in der Form gewählt, wie sie in [3] beschrieben ist:

$$E(k) = \alpha \epsilon^{2/3} L^{5/3} \frac{L^4 k^4}{(1 + L^2 k^2)^{17/6}}. \quad (3.8)$$

In dieser Gleichung steht  $L$  für eine Längenskala,  $\alpha \approx 1.7$  ist die Kolmogorov-Konstante und  $\epsilon$  bezeichnet die Zerteilungsrate der turbulenten, kinetischen Energie. Die Längenskala  $L$  wird in Meter angegeben und kann interpretiert werden als eine physikalische Beschreibung der Größe von Wirbeln in einem turbulenten Feld.

Durch Nutzen der Beziehung  $F_i(k_1) = \chi_{ii}(k_1, 0, 0)$  und der Gleichung (3.5) erhält man für die Ein-Punkt-Spektren eines isotropen Windfeldes:

$$\begin{aligned} F_1(k_1) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{11}(\mathbf{k}) e^{i(k_2 \cdot 0 + k_3 \cdot 0)} dk_2 dk_3 \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{E(k)}{4\pi k^4} (k^2 - k_1^2) dk_2 dk_3 \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{4\pi k^4} \alpha \epsilon^{2/3} L^{5/3} \frac{L^4 k^4}{(1 + L^2 k^2)^{17/6}} (k^2 + k_3^2) dk_2 dk_3 \\ &= \frac{\alpha \epsilon^{2/3} L^{17/3}}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{k_2^2 + k_3^2}{(1 + L^2 k^2)^{17/6}} dk_2 dk_3. \end{aligned}$$

Mit Hilfe eines Computeralgebrasystems, wie zum Beispiel *Mathematica*, kann zuerst das innere und dann das äußere Integral bestimmt werden.

Daraus ergibt sich:

$$\begin{aligned}
F_1(k_1) &= \frac{\alpha\epsilon^{2/3}L^{17/3}}{4\pi} \left( -\frac{6\pi \left(\frac{L^2}{1+k_1^2L^2}\right)^{5/6} \Gamma(-\frac{1}{6})}{55L^{17/3}\Gamma(\frac{5}{6})} \right) \\
&= \frac{-3}{110}\alpha\epsilon^{2/3} \left(\frac{L^2}{1+k_1^2L^2}\right)^{5/6} \frac{\Gamma(-\frac{1}{6})}{\Gamma(\frac{5}{6})} \\
&= \frac{9}{55}\alpha\epsilon^{2/3}L^{5/3} \frac{1}{(1+k_1^2L^2)^{5/6}}.
\end{aligned}$$

$F_1(k_1)$  wird als Ein-Punkt- $u$ -Spektrum bezeichnet und  $\Gamma(q)$  steht für die Euler'sche Gamma-Funktion. Analog können auch das Ein-Punkt- $v$ -Spektrum  $F_2(k_1)$  und das Ein-Punkt- $w$ -Spektrum  $F_3(k_1)$  bestimmt werden:

$$F_2(k_1) = F_3(k_1) = \frac{3}{110}\alpha\epsilon^{2/3}L^{5/3} \frac{3 + 8L^2k_1^2}{(1 + L^2k_1^2)^{11/6}}.$$

Alle Ein-Punkt-Kreuzspektren sind gleich 0.

Der Vorteil des isotropen Turbulenzenmodells besteht darin, dass die Spektren und Kreuzspektren für hohe Frequenzen gut beschrieben werden. Der Nachteil bei diesem Modell ist, dass die Varianzen der Geschwindigkeitskomponenten  $\sigma_u^2$ ,  $\sigma_v^2$  und  $\sigma_w^2$  gleich sind, was nicht mit den Messdaten aus der Natur übereinstimmt.

### 3.3 Spektraltensor des anisotropen Turbulenzmodells

Um den Nachteil des isotropen Tensormodells, dass die Varianzen der Geschwindigkeitskomponenten gleich sind, zu kompensieren, wird ein weiteres Tensormodell eingeführt. Dabei wird ein Scherfluss vorausgesetzt, was bedeutet, dass die Windgeschwindigkeit mit zunehmender Höhe anwächst.

Zur Modellierung des spektralen Geschwindigkeitstensors für das anisotrope Turbulenzmodell wird die Navier-Stokes-Gleichung für inkompressible Gase

$$\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^3 \tilde{u}_j \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^3 \nu \frac{\partial^2 \tilde{u}_i}{\partial x_j \partial x_j}, \quad i = 1, 2, 3$$

mit dem Druck  $p = p(\mathbf{x}, t)$ , der Dichte  $\rho$  und der kinematischen Viskosität  $\nu$ , linearisiert. Dies geschieht, um die Auswirkungen des Schereffekts auf die Turbulenzen zu beurteilen. Mit Hilfe der Annahme, dass die Scherung linear und somit  $dU/dz$  konstant ist, erhält man eine lineare Differentialgleichung

für die zeitliche Entwicklung des Spektraltensors.

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{j=1}^3 \frac{dk_j}{dt} \frac{\partial}{\partial k_j} \right) dZ_i(\mathbf{k}, t) = \frac{dU}{dz} \left( -\delta_{i1} + 2 \frac{k_i k_1}{k^2} \right) dZ_3(\mathbf{k}, t), \quad i = 1, 2, 3$$

Die Änderung des Wellenvektors  $\mathbf{k}$  als Funktion der Zeit beschreibt, wie sich die Orientierung und die Form der Wirbel durch die mittlere Scherung verändern. Mit  $\mathbf{k}(t=0) = (k_1, k_2, k_{30})$  als Startwert für den Wellenvektor  $\mathbf{k}$  ist diese Entwicklung mit der Zeit gegeben durch:

$$\mathbf{k}(t) = \left( k_1, k_2, k_{30} - k_1 t \frac{dU}{dz} \right). \quad (3.9)$$

Ausgehend von den Statistiken zweiter Ordnung der Anfangsbedingung  $d\mathbf{Z}^{iso}$ , welche der isotrope Spektraltensor aus Gleichung (3.7) beschreibt, wird das Turbulenzfeld  $d\mathbf{Z}(\mathbf{k}(t), t)$  mit zunehmender Zeit immer mehr anisotrop. Die Linearisierung ist aber unrealistisch, da an manchen Stellen die ausgedehnten Wirbel aufbrechen werden. Um dieses Problem zu beheben, wird ein Gleichgewicht gefordert, wobei Wirbel mit einer Größe proportional zu  $k^{-1}$  über eine Zeit proportional zu ihrer Lebensdauer  $\tau$  durch die Scherung ausgedehnt werden. Wenigstens für relative hohe Frequenzen und Wellenzahlen ist  $\tau$  proportional zu  $k^{-2/3}$ , und es wird ein Parameter  $\hat{\Gamma}$  eingeführt, so dass die dimensionslose Lebensdauer  $\beta$  beschrieben werden kann durch:

$$\beta \equiv \frac{dU}{dz} \tau = \hat{\Gamma} (kL)^{-2/3}.$$

Für diesen Fall ist es am zweckdienlichsten, die Ergebnisse durch den stochastischen Prozess  $d\mathbf{Z}(\mathbf{k})$ , wie in Gleichung (3.3) und (3.4) definiert, darzustellen. Es wird  $\mathbf{k}_0$  definiert als  $\mathbf{k}_0 = (k_1, k_2, k_{30})$  mit  $k_{30} = k_3 + \beta k_1$ .

Wenn die Anfangsbedingung  $d\mathbf{Z}^{iso}(\mathbf{k}_0)$  die Statistiken des isotropen Spektraltensors besitzt, dann kann der Spektraltensor des anisotropen Turbulenzmodells von Gleichung (3.4) und den folgenden Gleichungen gefunden werden:

$$d\mathbf{Z}(\mathbf{k}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \zeta_1 \\ 0 & 1 & \zeta_2 \\ 0 & 0 & k_0^2/k^2 \end{pmatrix} d\mathbf{Z}^{iso}(\mathbf{k}_0) \quad (3.10)$$

$$\begin{aligned}\zeta_1 &= C_1 - \frac{k_2 C_2}{k_1} \\ \zeta_2 &= \frac{k_2 C_1}{k_1} + C_2 \\ C_1 &= \frac{\beta k_1^2 (k_0^2 - 2k_{30}^2 + \beta k_1 k_{30})}{k^2 (k_1^2 + k_2^2)} \\ C_2 &= \frac{k_2 k_0^2}{(k_1^2 + k_2^2)^{3/2}} \arctan \left( \frac{\beta k_1 (k_1^2 + k_2^2)^{1/2}}{k_0^2 - k_{30} k_1 \beta} \right).\end{aligned}$$

Im Gegensatz zu dem isotropen Tensormodell gibt es hier einen Extraparameter  $\hat{\Gamma}$ , der die Anisotropie des Tensors beschreibt. Integriert man den Spektrentensor über den gesamten Wellenvektorbereich, erhält man die Varianzen als Funktionen von  $\hat{\Gamma}$ . Es kann so gezeigt werden, dass, wenn Anisotropie herrscht,

$$\sigma_u^2 > \sigma_v^2 > \sigma_w^2 \text{ und } \langle uw \rangle < 0$$

gilt, was durch Beobachtungen bestätigt wird. Die Kovarianzen  $\langle uv \rangle$  und  $\langle vw \rangle$  sind gleich 0. Außerdem gilt, dass der Abstand zwischen den Varianzen mit zunehmendem  $\hat{\Gamma}$  immer größer wird, wie in Abbildung 2 zu sehen ist.

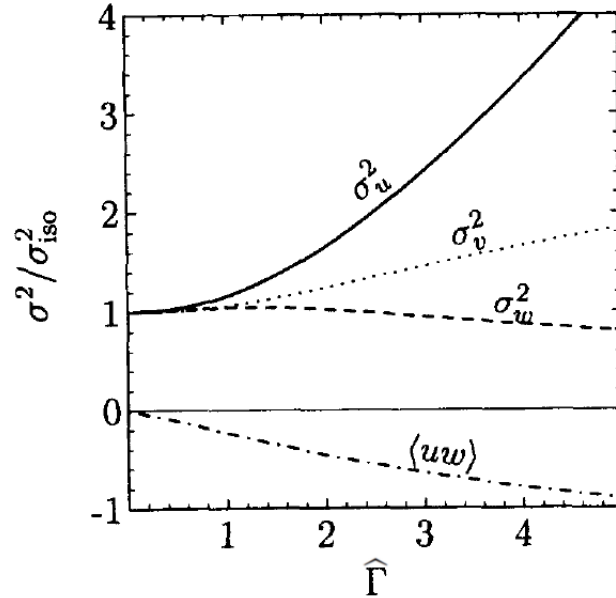


Abbildung 2: Änderung der Varianzen und der Kovarianz  $\langle uw \rangle$  in Abhängigkeit von  $\hat{\Gamma}$

### 3.4 Fourier-Simulation

Für die Simulation eines Geschwindigkeitsfeldes  $\mathbf{u}(\mathbf{x})$  wird das Integral aus Gleichung (3.3) durch den Realteil einer inversen diskreten Fourier-Transformation approximiert:

$$u_i(\mathbf{x}) = \operatorname{Re} \left( \sum_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \sum_{j=1}^3 C_{ij}(\mathbf{k}) n_j(\mathbf{k}) \right), \quad i = 1, 2, 3. \quad (3.11)$$

Dabei gilt für die  $l$ -te Komponente von  $\mathbf{x}$ ,  $x_l = n\Delta L_l$  mit  $n = 1, \dots, N_l$ . Die Summation  $\sum_{\mathbf{k}}$  läuft über alle Wellenvektoren  $\mathbf{k}$  mit den Komponenten:

$$k_i = \frac{m2\pi}{L_i}, \quad m = -\frac{N_i}{2}, \dots, \frac{N_i}{2} - 1, \quad m \in \mathbb{Z}.$$

Somit folgt, dass die Anzahl der Stützstellen  $N_i$  in jeder Richtung wenigstens gerade sein muss. Die  $C_{ij}(\mathbf{k})$  sind Koeffizienten, welche bestimmt werden müssen und die  $n_j(\mathbf{k})$  sind unabhängige, komplexe, normalverteilte Zufallsvariablen mit der Einheitsvarianz.

Durch das Lösen von Gleichung (3.11) erhält man näherungsweise:

$$C_{ij}(\mathbf{k}) n_j(\mathbf{k}) = \frac{1}{V(B)} \int_B u_i(\mathbf{x}) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} d\mathbf{x}. \quad (3.12)$$

$V(B) = L_1 L_2 L_3$  bezeichnet das Volumen des dreidimensionalen Gebietes  $B$ , welches das zu simulierende Geschwindigkeitsfeld enthält und  $\int_B d\mathbf{x}$  steht für die Integration über das gesamte Gebiet des Geschwindigkeitsfeldes.

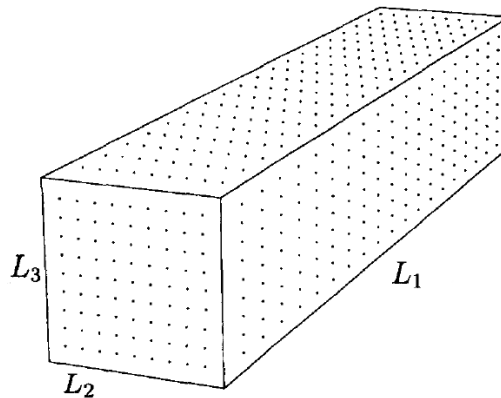


Abbildung 3: Dreidimensionales Gebiet  $B$

Um die  $C_{ij}(\mathbf{k})$  zu bestimmen, wird der Kovarianztensor von Gleichung (3.12) berechnet und man erhält:

$$\begin{aligned} C_{ik}^*(\mathbf{k})C_{jk}(\mathbf{k}) &= \frac{1}{V^2(B)} \int_B \int_B \langle u_i(\mathbf{x})u_j(\mathbf{x}') \rangle e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}'} d\mathbf{x}d\mathbf{x}' \\ &= \frac{1}{V^2(B)} \int_B \int_B R_{ij}(\mathbf{x}' - \mathbf{x}) 1_B(\mathbf{x}) 1_B(\mathbf{x}') e^{-i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}' - \mathbf{x})} d\mathbf{x}d\mathbf{x}', \end{aligned}$$

wobei gilt:

$$1_B(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & , \text{ falls } \mathbf{x} \in B \\ 0 & , \text{ sonst} \end{cases}.$$

Durch Umbenennen der Variablen mit  $\mathbf{r} = \mathbf{x}' - \mathbf{x}$ ,  $\mathbf{s} = \mathbf{x}' + \mathbf{x}$  und die Feststellung, dass  $\left| \frac{\partial(\mathbf{r}, \mathbf{s})}{\partial(\mathbf{x}, \mathbf{x}')} \right| = 8$  ist, folgt:

$$C_{ik}^*(\mathbf{k})C_{jk}(\mathbf{k}) = \frac{1}{8V^2(B)} \int_B R_{ij}(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \int_B 1_B\left(\frac{\mathbf{s} - \mathbf{r}}{2}\right) 1_B\left(\frac{\mathbf{s} + \mathbf{r}}{2}\right) d\mathbf{s}d\mathbf{r}. \quad (3.13)$$

Wird die innere Integration ausgeführt, entsteht:

$$\int_B 1_B\left(\frac{\mathbf{s} - \mathbf{r}}{2}\right) 1_B\left(\frac{\mathbf{s} + \mathbf{r}}{2}\right) d\mathbf{s} = \begin{cases} \prod_{l=1}^3 2(L_l - |r_l|) & , \text{ für } |r_l| < L_l, \forall l \\ 0 & , \text{ sonst} \end{cases}. \quad (3.14)$$

Nutzt man des Weiteren das Faltungstheorem und beachtet, dass von  $L - |r|$  die Fourier-Transformierte  $L^2 \text{sinc}^2\left(\frac{kL}{2}\right)$  für  $|r| < L$  und sonst 0 ist, so erhält man:

$$C_{ik}^*(\mathbf{k})C_{jk}(\mathbf{k}) = \int_B \Phi_{ij}(\mathbf{k}') \prod_{l=1}^3 \text{sinc}^2\left(\frac{(k_l - k'_l)L_l}{2}\right) d\mathbf{k}'. \quad (3.15)$$

Für die sinc-Funktion gilt:

$$\text{sinc}(x) \equiv \frac{\sin(x)}{x}.$$

Für  $L_l \gg L$  verhält sich die  $\text{sinc}^2$ -Funktion wie die  $\delta$ -Distribution. Die Größe des Gebietes unter der Kurve der  $\text{sinc}^2$ -Funktion beträgt dann  $\frac{2\pi}{L_l}$ . Dadurch

folgt:

$$C_{ik}^*(\mathbf{k})C_{jk}(\mathbf{k}) = \Phi_{ij}(\mathbf{k}) \prod_{l=1}^3 \frac{2\pi}{L_l} = \frac{(2\pi)^3}{L_1 L_2 L_3} \Phi_{ij}(\mathbf{k}). \quad (3.16)$$

Die Lösung dieser Gleichung lautet:

$$C_{ij}(\mathbf{k}) = \frac{(2\pi)^{3/2}}{(L_1 L_2 L_3)^{1/2}} A_{ij}(\mathbf{k}), \quad (3.17)$$

wobei für  $A_{ij}(\mathbf{k})$  gilt:

$$A_{ik}^*(\mathbf{k})A_{jk}(\mathbf{k}) = \Phi_{ij}(\mathbf{k}).$$

Aufgrund dieser Eigenschaft folgt, dass für die Berechnung der Fourier-Koeffizienten  $C_{ij}(\mathbf{k})$  der Spektraltensor faktorisiert werden muss. Für den isotropen Fall erhält man:

$$A(\mathbf{k}) = \frac{E^{1/2}(k)}{(4\pi)^{1/2}k^2} \begin{pmatrix} 0 & k_3 & -k_2 \\ -k_3 & 0 & k_1 \\ k_2 & -k_1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.18)$$

Die Richtigkeit dieser Zerlegung kann durch Einsetzen gezeigt werden.

$$\begin{aligned} \Phi(\mathbf{k}) &= \left( \frac{E^{1/2}(k)}{(4\pi)^{1/2}k^2} \right)^2 \begin{pmatrix} k_2^2 + k_3^2 & -k_1 k_2 & -k_1 k_3 \\ -k_2 k_1 & k_1^2 + k_3^2 & -k_2 k_3 \\ -k_3 k_1 & -k_3 k_2 & k_1^2 + k_2^2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{E(k)}{4\pi k^4} \begin{pmatrix} k^2 - k_1^2 & -k_1 k_2 & -k_1 k_3 \\ -k_1 k_2 & k^2 - k_2^2 & -k_2 k_3 \\ -k_1 k_3 & -k_2 k_3 & k^2 - k_3^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Wie zu sehen ist, entspricht der letzte Teil dieser Gleichung der Definition des isotropen Spektraltensors in Gleichung (3.7).

Um die Faktorisierung des anisotropen Spektraltensors zu erhalten, muss die Matrix aus Gleichung (3.18) mit der Matrix aus Gleichung (3.10) von links multipliziert werden. Somit gilt für die Faktorisierung des Spektraltensor des Schermodells:

$$\begin{aligned} A(\mathbf{k}) &= \frac{E^{1/2}(k_0)}{(4\pi)^{1/2}k_0^2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \zeta_1 \\ 0 & 1 & \zeta_2 \\ 0 & 0 & k_0^2/k^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & k_{30} & -k_2 \\ -k_{30} & 0 & k_1 \\ k_2 & -k_1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{E^{1/2}(k_0)}{(4\pi)^{1/2}k_0^2} \begin{pmatrix} k_2 \zeta_1 & k_{30} - k_1 \zeta_1 & -k_2 \\ k_2 \zeta_2 - k_{30} & -k_1 \zeta_2 & k_1 \\ k_2 k_0^2/k^2 & -k_1 k_0^2/k^2 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Aus dieser Faktorisierung ergibt sich der folgende anisotrope Spektraltensor.

$$\begin{aligned}
\Phi_{11}(\mathbf{k}) &= \frac{E(k_0)}{4\pi k_0^4} (k_2^2 + k_{30}^2 - 2k_1 k_{30} \zeta_1 + (k_1^2 + k_2^2) \zeta_1^2) \\
\Phi_{12}(\mathbf{k}) &= \frac{E(k_0)}{4\pi k_0^4} ((k_1^2 + k_2^2) \zeta_1 \zeta_2 - k_1 k_2 - k_2 k_{30} \zeta_1 - k_1 k_{30} \zeta_2) \\
\Phi_{13}(\mathbf{k}) &= \frac{E(k_0)}{4\pi k_0^2 k^2} ((k_1^2 + k_2^2) \zeta_1 - k_1 k_{30}) \\
\Phi_{22}(\mathbf{k}) &= \frac{E(k_0)}{4\pi k_0^4} (k_1^2 + k_{30}^2 - 2k_2 k_{30} \zeta_2 + (k_1^2 + k_2^2) \zeta_2^2) \\
\Phi_{23}(\mathbf{k}) &= \frac{E(k_0)}{4\pi k_0^2 k^2} ((k_1^2 + k_2^2) \zeta_2 - k_2 k_{30}) \\
\Phi_{33}(\mathbf{k}) &= \frac{E(k_0)}{4\pi k^4} (k_1^2 + k_2^2)
\end{aligned}$$

Dieses Ergebnis stimmt mit dem in [2] von Mann vorgestellten Spektraltensor des Schermodells überein.

Setzt man nun noch die Gleichungen (3.8) und (3.18) in die Gleichung (3.17) ein, so entsteht:

$$C(\mathbf{k}) = (\alpha \epsilon^{2/3})^{1/2} \frac{\sqrt{2}\pi}{(L_1 L_2 L_3)^{1/2}} \frac{L^{17/6}}{(1 + L^2 k^2)^{17/12}} \begin{pmatrix} 0 & k_3 & -k_2 \\ -k_3 & 0 & k_1 \\ k_2 & -k_1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.19)$$

Für den anisotropen Fall hat die Koeffizientenmatrix die Form:

$$C(\mathbf{k}) = (\alpha \epsilon^{2/3})^{1/2} \frac{\sqrt{2}\pi}{(L_1 L_2 L_3)^{1/2}} \frac{L^{17/6}}{(1 + L^2 k_0^2)^{17/12}} \begin{pmatrix} k_2 \zeta_1 & k_{30} - k_1 \zeta_1 & -k_2 \\ k_2 \zeta_2 - k_{30} & -k_1 \zeta_2 & k_1 \\ k_2 k_0^2 / k^2 & -k_1 k_0^2 / k^2 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.20)$$

Die Simulation eines Geschwindigkeitsfeldes geschieht dann in den folgenden drei Schritten:

1. Bestimmung der Koeffizienten  $C_{ij}(\mathbf{k})$
2. Simulation der normalverteilten Zufallsvariablen  $n_j(\mathbf{k})$  und Multiplikation mit den Koeffizienten
3. Berechnen von  $u_i(\mathbf{k})$  mittels inverser FFT ( $i = 1, 2, 3$ )



### 3.5 Probleme

Bei der Simulation eines Windfeldes mittels Gleichung (3.11) und den entsprechenden Koeffizienten aus Gleichung (3.17) können verschiedene Probleme auftreten.

Ein Problem besteht darin, dass man das Verhältnis zwischen der Längenskalierung  $L$  und den Abmessungen  $L_2$  und  $L_3$  des Feldes beachten muss. Für den Fall, dass  $L_2$  oder  $L_3$  kleiner sind als  $8L$ , stellt Gleichung (3.16) keine gute Approximation für Gleichung (3.15) dar. Weil jedoch in den meisten praktischen Anwendungen  $L_1 \gg L$  gilt, kann Gleichung (3.15) wenigstens reduziert werden auf:

$$C_{ik}^*(\mathbf{k})C_{jk}(\mathbf{k}) = \frac{2\pi}{L_1} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{ij}(k_1, k'_2, k'_3) \prod_{l=2}^3 \text{sinc}^2 \left( \frac{(k_l - k'_l)L_l}{2} \right) dk'_2 dk'_3. \quad (3.21)$$

Diese Integration ist beschränkt auf Wellenvektoren  $\mathbf{k}$ , für die  $k = \|\mathbf{k}\| \leq \frac{3}{L}$  gilt. Außerhalb dieses Bereiches wird, ungeachtet der Größe der Box, Gleichung (3.16) als Approximation für Gleichung (3.15) angenommen. Dieses Problem hat zur Folge, dass im Integrationsbereich die im letzten Abschnitt beschriebene Faktorisierung nicht genutzt werden kann. Der Ausweg besteht in der numerischen Berechnung des Doppelintegrals, der anschließenden Aufstellung eines nichtlinearen Gleichungssystems und der Lösung des entstandenen Gleichungssystems. Dieses Vorgehen wird in Abschnitt 4 nochmals näher erläutert.

Da für die Berechnung der Windkräfte, welche auf eine Windkraftanlage wirken, Zeitreihen benötigt werden, müssen diese aus dem simulierten dreidimensionalen Windfeld erzeugt werden. Das Erzeugen dieser Zeitreihen aus dem Ergebnis der Simulation ist jedoch eine weitere Schwierigkeit. Zur Herleitung dieses Verfahrens wurde angenommen, dass sich die benötigten Zeitreihen als räumliche Reihen interpretieren lassen und somit die Abhängigkeit von der Zeit durch  $\tilde{\mathbf{u}}(x, y, z, t) = \hat{\mathbf{u}}(x - U_m t, y, z, 0)$  berücksichtigt wird.  $U_m$  soll hierbei für eine vertikale Mittlung von  $U(z)$  stehen. Da im isotropen Fall die mittlere Windgeschwindigkeit  $U$  konstant und unabhängig von der räumlichen Position ist, gilt  $U_m = U$ . Für ein anisotropes Windfeld kann jedoch diese Vorgehensweise nicht übernommen werden. Durch die meist logarithmische Form des Windprofils wird das arithmetische Mittel von  $U(z)$  über alle Werte von  $z$  gebildet, woraus sich ergibt:

$$U_m = \frac{1}{N_3} \sum_{n=0}^{N_3-1} U(n\Delta z).$$

### 3.6 Vergleich mit der Sandia-Methode

Das Verfahren von Mann zur Simulation eines Windfeldes erzeugt ein dreidimensionales Feld. Bei der *Sandia-Methode* von Veers werden die turbulenten Anteile eines Windfeldes direkt in Form von Zeitreihen simuliert. Im Gegensatz dazu simuliert man in dem von Mann beschriebenen Verfahren die Schwankungen um den mittleren Wind in einem räumlichen Gebiet und anschließend bestimmt man aus den Ergebnissen der Simulation die Zeitreihen. Der Vorteil des Mann-Verfahrens gegenüber der Veers-Methode ist, dass durch die angenommenen Voraussetzungen das Modell den physikalischen Gegebenheiten besser entspricht. So ist beispielsweise durch die Annahme von inkompressiblen Turbulenzen im isotropen Fall und der Navier-Stokes-Gleichung für inkompressible Gase als Ausgangspunkt im anisotropen Fall gegeben, dass das entstehende Windfeld divergenzfrei ist und somit weder Quellen noch Senken besitzt. Diese Aussage kann jedoch bei einem mit der *Sandia-Methode* simulierten Windfeld nicht getroffen werden.

Ein Vergleich der Algorithmen anhand eines Beispiels ist in Abschnitt 5 zu finden.

## 4 Umsetzung

Die Umsetzung des Verfahrens von Mann wurde mit *MatLab* vorgenommen, da viele der benötigten mathematischen Verfahren in diesem Programm bereits vorhanden sind. Des Weiteren wurde *MatLab* genutzt um Teile der Ergebnisse grafisch darzustellen.

Für die Berechnung der Fourier-Koeffizienten  $C_{ij}(\mathbf{k})$  benötigt man verschiedene Eingangsdaten. Da diese durch den Anwender vorgegeben werden müssen, wurden zu Testzwecken die Daten von Mann (siehe [1]) genutzt. Es wurden dafür die Abbildungen 4 und 5 ausgewertet und in Form von Tabellen an das Programm übergeben, woraus die benötigten Daten per Interpolation gewonnen wurden. Die entsprechenden Tabellen sind in Anhang C zu finden.

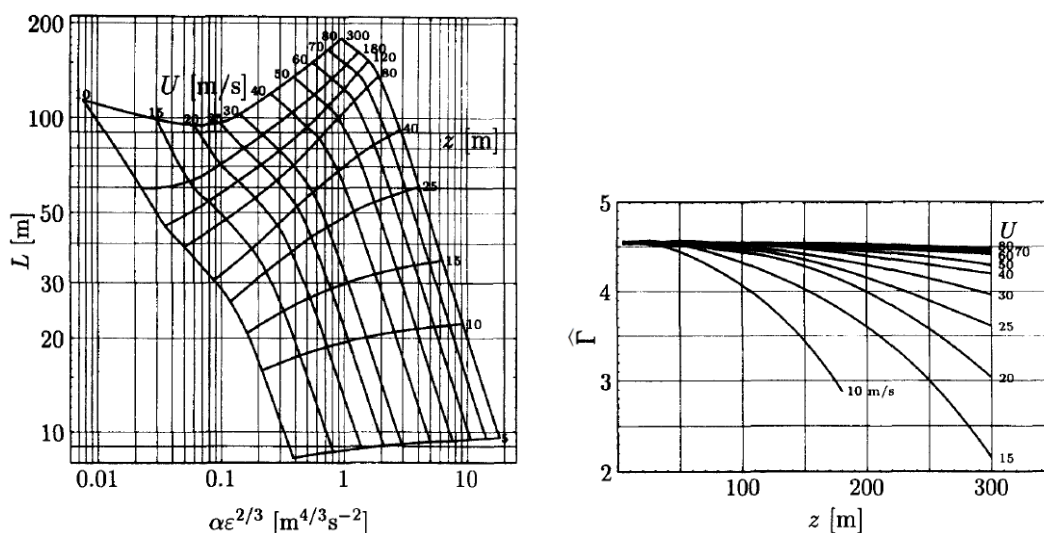


Abbildung 4: Parameter des Spektraltensors abgeleitet von den Daten der ESDU-Modellspektren für Turbulenzen über dem Meer

Nachdem alle benötigten Daten an Hand der Eingabeparameter ausgewählt wurden, werden die Koeffizienten  $C_{ij}(\mathbf{k})$  und die zufälligen Vektoren  $n_j(\mathbf{k})$  bestimmt. Bei der Berechnung der Koeffizienten muss jedoch auf das Verhältnis von  $L_2$  und  $L_3$  zu dem Parameter  $L$  geachtet werden, wie bereits in Abschnitt 3.5 erläutert wurde. Wenn  $L_2, L_3 \geq 8L$  gilt, wird für die Berechnung der Koeffizienten im isotropen Fall Gleichung (3.19) und im anisotropen Fall Gleichung (3.20) genutzt. Gilt jedoch  $L_2 < 8L$  oder  $L_3 < 8L$  muss überprüft werden, ob  $\|\mathbf{k}\| \leq 3/L$  ist. Sind diese beiden Bedingungen erfüllt, muss die Koeffizientenmatrix mittels Faktorisierung aus Gleichung (3.21) bestimmt

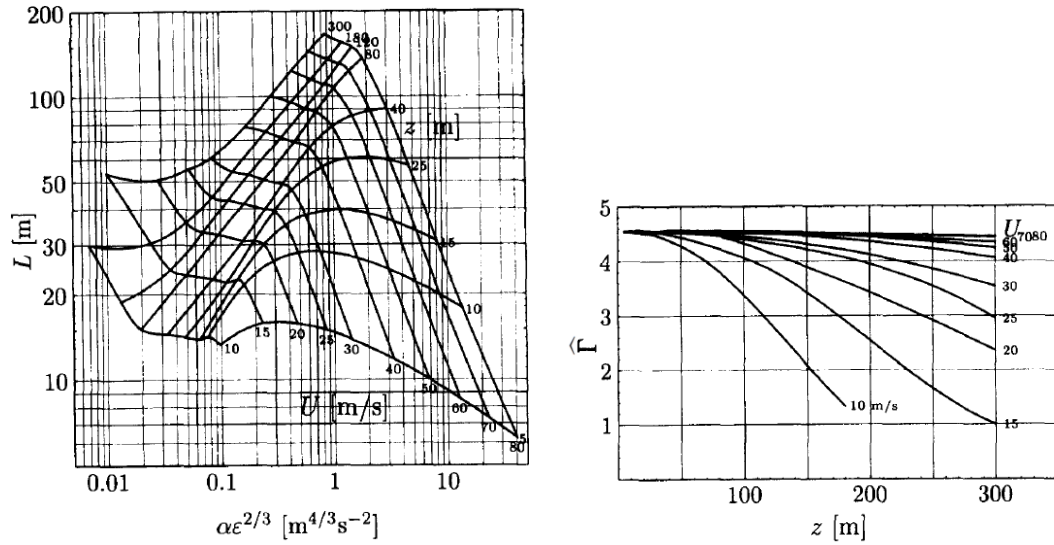


Abbildung 5: Parameter des Spektraltensors abgeleitet von den Daten der ESDU-Modellspektren für Turbulenzen über dem Land mit  $z_0 = 0.03 \text{ m}$

werden. Bei dieser Zerlegung muss wiederum zwischen dem Fall eines isotropen und eines anisotropen Windfeldes unterschieden werden.

Für den isotropen Fall wird der folgende Ansatz gewählt, wobei die Struktur der Matrix  $C$  von der Struktur der Koeffizientenmatrix aus Gleichung (3.19) resultiert und die Elemente  $C_{11} = 0$ ,  $C_{22} = 0$  und  $C_{33} = 0$  festgesetzt wurden.

$$X = C^T C$$

$$\begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} & X_{13} \\ X_{12} & X_{22} & X_{23} \\ X_{13} & X_{23} & X_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & C_{21} & C_{31} \\ C_{12} & 0 & C_{32} \\ C_{13} & C_{23} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & 0 & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & 0 \end{pmatrix}$$

Durch Auflösen dieser Matrixgleichung erhält man ein nichtlineares Gleichungssystem mit sechs Unbekannten und sechs Gleichungen.

$$\begin{aligned} 0 &= C_{21}^2 + C_{31}^2 - X_{11} \\ 0 &= C_{31}C_{32} - X_{12} \\ 0 &= C_{21}C_{23} - X_{13} \\ 0 &= C_{12}^2 + C_{32}^2 - X_{22} \\ 0 &= C_{12}C_{13} - X_{23} \\ 0 &= C_{13}^2 + C_{23}^2 - X_{33} \end{aligned}$$

Die Konstanten  $X_{ij}$  werden durch numerische Integration des folgenden Doppelintegrals bestimmt:

$$X_{ij} = \frac{2\pi}{L_1} \int \int \Phi_{ij}(k_1, k'_2, k'_3) \prod_{l=2}^3 \operatorname{sinc}^2 \left( \frac{(k_l - k'_l)L_l}{2} \right) dk'_2 dk'_3.$$

Bei diesem Doppelintegral wird  $k'_2$  über den Bereich von  $k_2 - 2\pi/L_2$  bis  $k_2 + 2\pi/L_2$  und  $k'_3$  über den Bereich von  $k_3 - 2\pi/L_3$  bis  $k_3 + 2\pi/L_3$  integriert. Das obige nichtlineare Gleichungssystem wird numerisch gelöst mit den entsprechenden Komponenten der Matrix aus Gleichung (3.19) als Startlösung. Für den anisotropen Fall wählt man denselben Ansatz wie im isotropen Fall, jedoch mit den Festlegungen:

$$\begin{aligned} C_{11} &= (\alpha\epsilon^{2/3})^{1/2} \frac{\sqrt{2}\pi}{(L_1 L_2 L_3)^{1/2}} \frac{L^{17/6}}{(1 + L^2 k_0^2)^{17/12}} * k_2 \zeta_1 \\ C_{22} &= (\alpha\epsilon^{2/3})^{1/2} \frac{\sqrt{2}\pi}{(L_1 L_2 L_3)^{1/2}} \frac{L^{17/6}}{(1 + L^2 k_0^2)^{17/12}} * (-k_1 \zeta_2) \\ C_{33} &= 0. \end{aligned}$$

So entsteht wiederum ein nichtlineares Gleichungssystem mit der folgenden Form:

$$\begin{aligned} 0 &= C_{11}^2 + C_{21}^2 + C_{31}^2 - X_{11} \\ 0 &= C_{11}C_{12} + C_{21}C_{22} + C_{31}C_{32} - X_{12} \\ 0 &= C_{11}C_{13} + C_{21}C_{23} - X_{13} \\ 0 &= C_{12}^2 + C_{22}^2 + C_{32}^2 - X_{22} \\ 0 &= C_{12}C_{13} + C_{22}C_{23} - X_{23} \\ 0 &= C_{13}^2 + C_{23}^2 - X_{33} \end{aligned}$$

Dieses Gleichungssystem wird ebenfalls numerisch gelöst mit den Komponenten der Koeffizientenmatrix aus Gleichung (3.20) als Startlösung.

Nach dem die Koeffizienten und die zufälligen Vektoren ermittelt wurden, kann die Gleichung (3.11) mit Hilfe von  $N_2 N_3 + N_1 N_3 + N_1 N_2$  inversen schnellen Fourier-Transformationen gelöst werden.

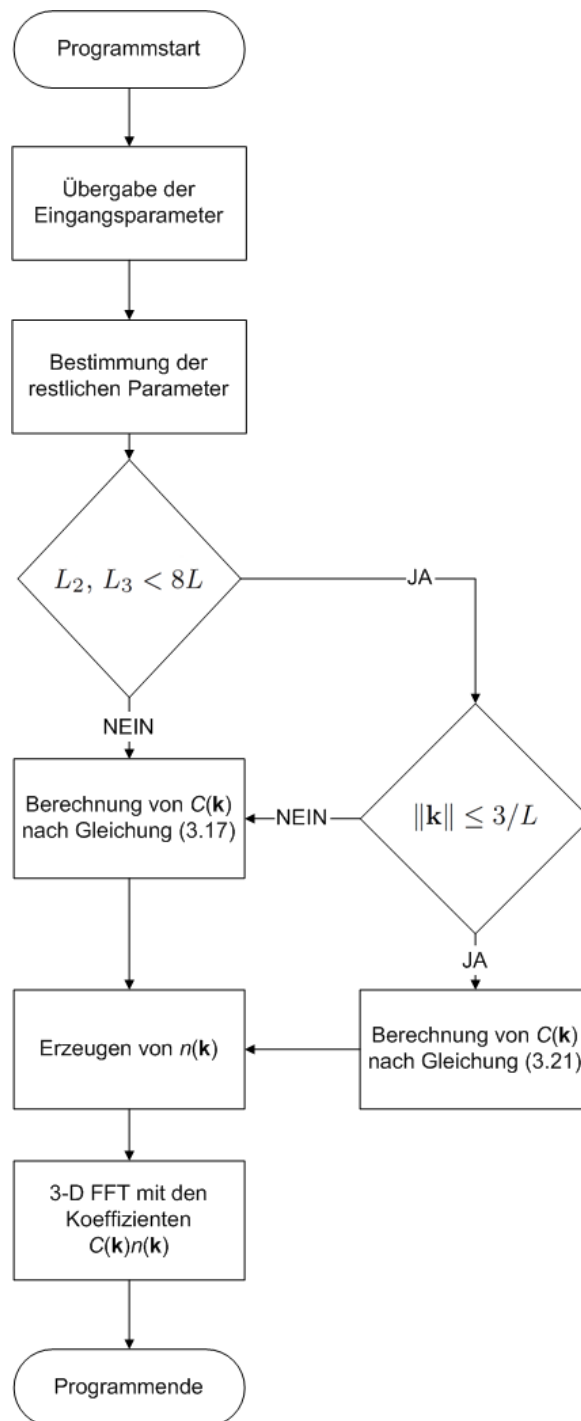


Abbildung 6: Programmablaufplan

## 5 Ergebnisse

Da es sich bei den Ergebnissen einer Simulation eines dreidimensionalen Windfeldes mit drei Geschwindigkeitskomponenten um eine große Anzahl von Daten handelt, wird an dieser Stelle auf eine direkte Darstellung der Ergebnisse verzichtet. Statt dessen ist es das Ziel dieses Abschnittes, die Richtigkeit der Ergebnisse nachzuweisen und die daraus gewonnenen Erkenntnisse zu erläutern.

### 5.1 Isotroper Fall

Wie bereits in Abschnitt 3.2 erklärt wurde, ist das Hauptmerkmal eines isotropen Windfeldes die Gleichheit der Varianzen. Mit Hilfe der Formel

$$\langle u_i u_j \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \chi_{ij}(k_1) dk_1 = \int \Phi_{ij}(\mathbf{k}) d\mathbf{k} \quad (5.1)$$

lässt sich diese Eigenschaft für die Theorie nachweisen.

$$\begin{aligned} \sigma_u^2 = \langle u_1 u_1 \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} F_1(k_1) dk_1 \\ &= \frac{9}{55} \alpha \epsilon^{2/3} L^{5/3} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1 + k_1^2 L^2)^{5/6}} dk_1 \\ &= \frac{9}{55} \alpha \epsilon^{2/3} L^{5/3} \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(\frac{1}{3})}{L \Gamma(\frac{5}{6})} \approx 0.68834 \alpha \epsilon^{2/3} L^{2/3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_v^2 = \langle u_2 u_2 \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} F_2(k_1) dk_1 \\ &= \frac{3}{110} \alpha \epsilon^{2/3} L^{5/3} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{3 + 8L^2 k_1^2}{(1 + k_1^2 L^2)^{11/6}} dk_1 \\ &= \frac{3}{110} \alpha \epsilon^{2/3} L^{5/3} \frac{6\sqrt{\pi} \Gamma(\frac{1}{3})}{L \Gamma(\frac{5}{6})} \approx 0.68834 \alpha \epsilon^{2/3} L^{2/3} \end{aligned}$$

Auf Grund der Eigenschaft der Ein-Punkt-Spektren, dass  $F_3(k_1) = F_2(k_1)$  gilt, folgt für die Varianzen  $\sigma_w^2 = \sigma_v^2$ .

Die Varianzen der Ergebnisse werden geschätzt mittels der Formel:

$$\widetilde{\sigma}_u^2 = \frac{1}{N_1 N_2 N_3 - 1} \sum_{i=1}^{N_1} \sum_{j=1}^{N_2} \sum_{k=1}^{N_3} (u(x_i, y_j, z_k) - \bar{u})^2.$$

Dabei steht  $\bar{u}$  für den Mittelwert von  $u$ . Da jedoch nur die Schwankungen um den mittleren Wind simuliert werden, besitzen alle Ergebnisse den Mittelwert 0 und obige Formel lässt sich vereinfachen zu:

$$\widetilde{\sigma}_u^2 = \frac{1}{N_1 N_2 N_3 - 1} \sum_{i=1}^{N_1} \sum_{j=1}^{N_2} \sum_{k=1}^{N_3} u^2(x_i, y_j, z_k). \quad (5.2)$$

### Beispiel 1

Für ein Windfeld der Größe  $2000 \text{ m} \times 150 \text{ m} \times 150 \text{ m}$  mit  $1024 \times 32 \times 32$  Stützstellen, einer Referenzwindgeschwindigkeit  $U_{ref} = 10 \text{ ms}^{-1}$  in einer Referenzhöhe  $z_{ref} = 10 \text{ m}$  über dem Meer ergeben sich die folgenden Parameter aus den Tabellen, welche in Abschnitt C zu finden sind:

$$L = 16.5 \text{ m}$$

$$\alpha \epsilon^{2/3} = 0.22 \text{ m}^{4/3} \text{ s}^{-2}.$$

Mit diesen Eingangsdaten erhält man nach Gleichung (5.1) eine theoretische Varianz von:

$$\sigma_{iso}^2 = \sigma_u^2 = \sigma_v^2 = \sigma_w^2 = 0.9815.$$

Die Varianzen der Ergebnisse werden mittels Gleichung (5.2) berechnet und man bekommt:

$$\widetilde{\sigma}_u^2 = 0.9132, \quad \widetilde{\sigma}_v^2 = 1.0706, \quad \widetilde{\sigma}_w^2 = 1.0394.$$

Aus diesen Schätzungen ist zu erkennen, dass die errechneten Varianzen und die theoretische Varianz mit einer Abweichung von  $\leq 9\%$  annähernd gleich sind und dadurch die Eigenschaft eines isotropen Windfeldes näherungsweise erfüllt ist.

Eine weitere Möglichkeit, um die simulierten Ergebnisse zu verifizieren, ist die Visualisierung des Windfeldes mit Hilfe der entstehenden Zeitreihen. Für räumlich benachbarte Zeitreihen in einem Windfeld gilt, dass das Verhalten dieser Reihen ähnlich sein muss und keine signifikanten Unterschiede aufweist. In den Abbildungen 7 bis 10 sind verschiedene Zeitreihen dargestellt, welche sich auf einer konstanten Höhe nebeneinander befinden. Daraus lässt sich erkennen, dass das Verhalten der Zeitreihen tatsächlich ähnlich ist.



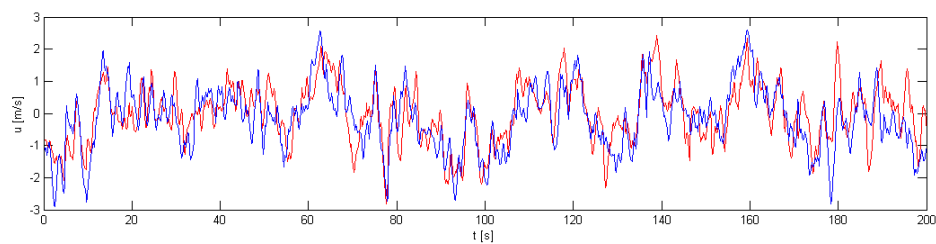


Abbildung 7: Zeitreihen an den Stellen  $y = 1, z = 1$  (rot) und  $y = 2, z = 1$  (blau)

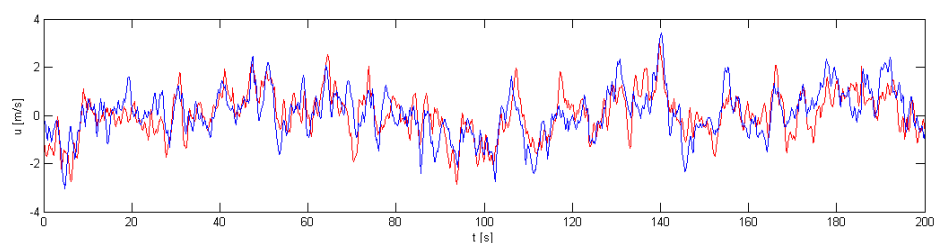


Abbildung 8: Zeitreihen an den Stellen  $y = N_2 - 1, z = N_3$  (rot) und  $y = N_2, z = N_3$  (blau)

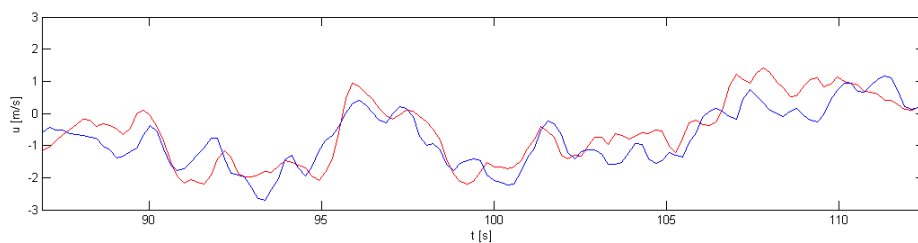


Abbildung 9: Ausschnitt der Zeitreihen bei  $y = 1, z = 1$  (rot) und  $y = 2, z = 1$  (blau)

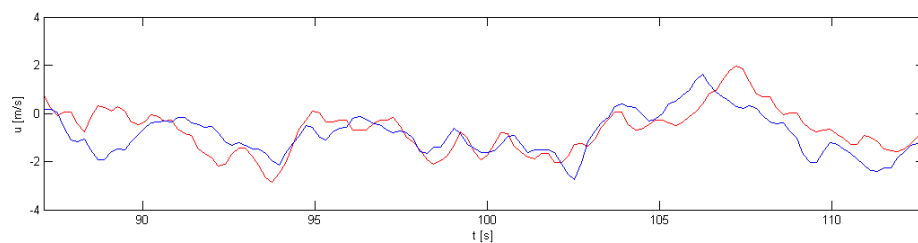


Abbildung 10: Ausschnitt der Zeitreihen bei  $y = N_2 - 1, z = N_3$  (rot) und  $y = N_2, z = N_3$  (blau)

**Beispiele 2 bis 5**

Für die Beispiele 2 bis 5 werden im Folgenden nur die Varianzen betrachtet. Dies geschieht in Form von Tabellen um die einzelnen Unterschiede in den Berechnungen besser hervorheben zu können.

In Tabelle 1 sind die Parameter, mit denen diese Beispiele gerechnet wurden, aufgeführt.

|           | Beispiel 2 | Beispiel 3 | Beispiel 4       | Beispiel 5       |
|-----------|------------|------------|------------------|------------------|
| $L_1$     | 2000       | 2000       | 9000             | 9000             |
| $L_2$     | <b>150</b> | <b>300</b> | 300              | 300              |
| $L_3$     | <b>150</b> | <b>300</b> | 300              | 300              |
| $N_1$     | 1024       | 1024       | 4096             | 4096             |
| $N_2$     | 32         | 32         | 32               | 32               |
| $N_3$     | 32         | 32         | 32               | 32               |
| $U_{ref}$ | 10         | 10         | 15               | 15               |
| $z_{ref}$ | 50         | 50         | 70               | 70               |
| Position  | über Meer  | über Meer  | <b>über Meer</b> | <b>über Land</b> |

Tabelle 1: Eingangsdaten für die Beispielrechnungen von isotropen Windfeldern

Entsprechend den Werten aus Tabelle 1 sind in Tabelle 2 die weiteren Parameter, welche sich aus den Eingangsdaten ergeben, und die entsprechenden Varianzen dargestellt.

|                          | Beispiel 2    | Beispiel 3    | Beispiel 4 | Beispiel 5 |
|--------------------------|---------------|---------------|------------|------------|
| $L$                      | 32.8125       | 32.8125       | 45.2305    | 23.7383    |
| $\alpha\epsilon^{2/3}$   | 0.0788        | 0.0788        | 0.1337     | 0.0574     |
| $\sigma_{iso}^2$         | 0.5557        | 0.5557        | 1.1686     | 0.3263     |
| $\widetilde{\sigma}_u^2$ | <b>0.3786</b> | <b>0.5352</b> | 0.839      | 0.2648     |
| $\widetilde{\sigma}_v^2$ | <b>0.4334</b> | <b>0.5915</b> | 0.9816     | 0.2947     |
| $\widetilde{\sigma}_w^2$ | <b>0.431</b>  | <b>0.5929</b> | 0.9913     | 0.2975     |

Tabelle 2: Resultate der Beispielrechnungen von isotropen Windfeldern

Betrachtet man die Ergebnisse des zweiten Beispiels, sieht man, dass die theoretisch vorausgesetzte Gleichheit der Varianzen nicht erfüllt ist. Im Vergleich dazu zeigt Beispiel 3, dass durch eine Erhöhung der Parameter  $L_2$  und  $L_3$  die geschätzten Varianzen  $\widetilde{\sigma}_u^2$ ,  $\widetilde{\sigma}_v^2$  und  $\widetilde{\sigma}_w^2$  mit der errechneten Varianz  $\sigma_{iso}^2$  annähernd übereinstimmen. Daraus lässt sich erkennen, dass die geschätzten Varianzen von der Wahl der Parameter  $L_1$ ,  $L_2$  und  $L_3$  abhängen. In Abschnitt 5.4 wird dieses Verhalten näher erläutert.

Die Beispiele 4 und 5 sollen veranschaulichen, welchen Einfluss der Landschaftstyp auf die Parameter  $L$  und  $\alpha\epsilon^{2/3}$  und auf die Varianzen der Ergebnisse hat.

## 5.2 Anisotroper Fall

Analog zum isotropen Fall werden die theoretischen Kenngrößen in einem anisotropen Windfeld nach Gleichung (5.1) berechnet. Für die theoretischen Varianzen gilt, wie bereits in Abschnitt 3.3 erläutert wurde:

$$\sigma_u^2 > \sigma_v^2 > \sigma_w^2.$$

Diese werden wiederum durch Gleichung (5.2) aus den simulierten Ergebnissen geschätzt.

Die Kovarianz zwischen den Komponenten  $u$  und  $w$ , für die  $\langle uw \rangle < 0$  gelten muss, wird mit Hilfe der folgende Schätzung ermittelt:

$$\widetilde{\langle uw \rangle} = \frac{1}{N_1 N_2 N_3 - 1} \sum_{i=1}^{N_1} \sum_{j=1}^{N_2} \sum_{k=1}^{N_3} (u(x_i, y_j, z_k) - \bar{u})(w(x_i, y_j, z_k) - \bar{w}).$$

Wegen  $\bar{u} = \bar{w} = 0$  kann diese Formel vereinfacht werden, und es entsteht:

$$\widetilde{\langle uw \rangle} = \frac{1}{N_1 N_2 N_3 - 1} \sum_{i=1}^{N_1} \sum_{j=1}^{N_2} \sum_{k=1}^{N_3} u(x_i, y_j, z_k) w(x_i, y_j, z_k). \quad (5.3)$$

### Beispiel 6

Die Abmessungen des Windfeldes, welches sich über dem Meer befindet, betragen in diesem Beispiel  $2000 \text{ m} \times 300 \text{ m} \times 300 \text{ m}$  mit  $1024 \times 32 \times 32$  Stützstellen. Des Weiteren wird eine mittlere Windgeschwindigkeit von  $U_{ref} = 15 \text{ ms}^{-1}$  in einer Höhe von  $z_{ref} = 40 \text{ m}$  angenommen. Aus diesen Eingabeparametern ergeben sich für die restlichen Parameter:

$$\begin{aligned} L &= 38 \text{ m} \\ \alpha\epsilon^{2/3} &= 0.18 \text{ m}^{4/3}\text{s}^{-2} \\ \widehat{\Gamma} &= 4.53. \end{aligned}$$

Mit den gegebenen Parametern folgt für die theoretische Varianz, welche der Varianz in dem entsprechenden isotropen Windfeld entspricht,  $\sigma_{iso}^2 = 1.4004$ . Die geschätzten Kenngrößen aus den Ergebnissen sind:

$$\widetilde{\sigma}_u^2 = 3.9259, \quad \widetilde{\sigma}_v^2 = 1.4154, \quad \widetilde{\sigma}_w^2 = 0.702, \quad \langle \widetilde{uw} \rangle = -0.3604.$$

Aus den geschätzten Varianzen und der theoretisch berechneten Varianz ergeben sich die folgenden Quotienten:

$$\frac{\widetilde{\sigma}_u^2}{\sigma_{iso}^2} = 2.8034, \quad \frac{\widetilde{\sigma}_v^2}{\sigma_{iso}^2} = 1.0107, \quad \frac{\widetilde{\sigma}_w^2}{\sigma_{iso}^2} = 0.5013.$$

Aus diesen Ergebnissen lässt sich erkennen, dass die Bedingungen für ein anisotropes Windgeschwindigkeitsfeld erfüllt sind.

In den Abbildungen 11 bis 14 sind analog zu Beispiel 1 verschiedene Zeitreihen für die Schwankungskomponente  $u$  dargestellt. Für Zeitreihen in einem anisotropen Fall gilt wie im isotropen Fall, dass das Verhalten benachbarter Zeitreihen ähnlich sein muss.

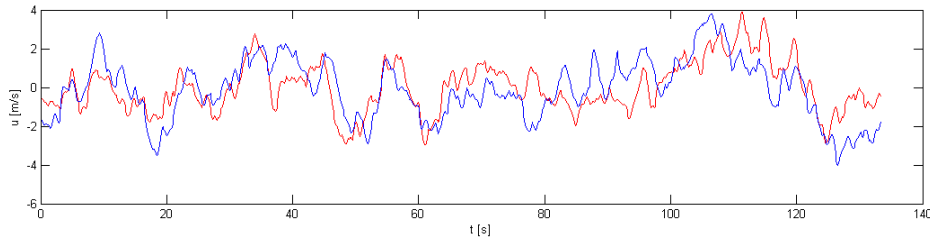


Abbildung 11: Zeitreihen an den Stellen  $y = 1, z = 1$  (rot) und  $y = 2, z = 1$  (blau)

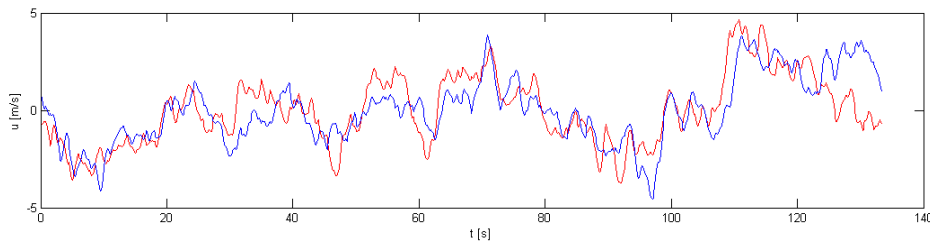


Abbildung 12: Zeitreihen an den Stellen  $y = N_2 - 1, z = N_3$  (rot) und  $y = N_2, z = N_3$  (blau)

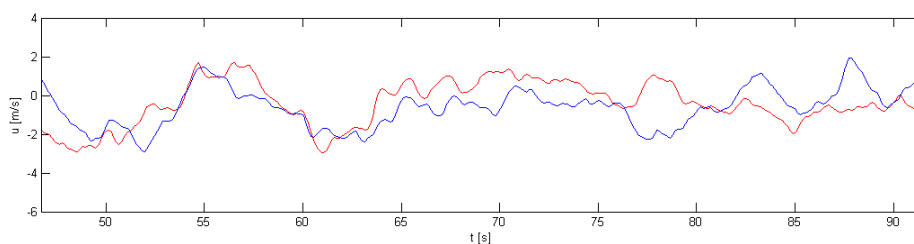


Abbildung 13: Ausschnitt der Zeitreihen bei  $y = 1, z = 1$  (rot) und  $y = 2, z = 1$  (blau)

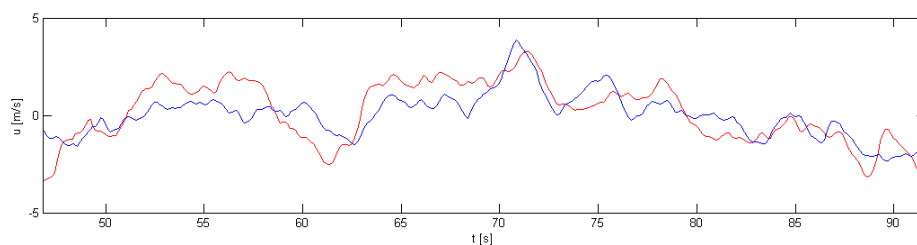


Abbildung 14: Ausschnitt der Zeitreihen bei  $y = N_2 - 1, z = N_3$  (rot) und  $y = N_2, z = N_3$  (blau)

### Beispiele 7 bis 9

Die Beispiele 7 bis 9 sollen veranschaulichen, welchen Einfluss verschiedene Veränderungen auf die Ergebnisse eines anisotropen Windfeldes über Land haben. Die Eingabedaten und die dazugehörigen Ergebnisse sind in Tabelle 3 und Tabelle 4 aufgelistet.

|           | Beispiel 7               | Beispiel 8                | Beispiel 9               |
|-----------|--------------------------|---------------------------|--------------------------|
| $L_1$     | 2000                     | 2000                      | 2000                     |
| $L_2$     | <b>500</b>               | <b>500</b>                | <b>800</b>               |
| $L_3$     | <b>500</b>               | <b>500</b>                | <b>800</b>               |
| $N_1$     | 1024                     | 1024                      | 1024                     |
| $N_2$     | 32                       | 32                        | 32                       |
| $N_3$     | 32                       | 32                        | 32                       |
| $U_{ref}$ | 25                       | 25                        | 25                       |
| $z_{ref}$ | 300                      | 300                       | 300                      |
| Schranke  | $L_2, L_3 < \mathbf{8L}$ | $L_2, L_3 < \mathbf{12L}$ | $L_2, L_3 < \mathbf{8L}$ |

Tabelle 3: Eingangsparameter für anisotrope Windfelder

|                          | Beispiel 7     | Beispiel 8     | Beispiel 9     |
|--------------------------|----------------|----------------|----------------|
| $L$                      | 56             | 56             | 56             |
| $\alpha\epsilon^{2/3}$   | 0.053          | 0.053          | 0.053          |
| $\hat{\Gamma}$           | 2.97           | 2.97           | 2.97           |
| $\sigma_{iso}^2$         | 0.534          | 0.534          | 0.534          |
| $\widetilde{\sigma}_u^2$ | <b>1.7018</b>  | <b>1.6333</b>  | <b>1.438</b>   |
| $\widetilde{\sigma}_v^2$ | <b>1.2063</b>  | <b>0.9144</b>  | <b>0.9808</b>  |
| $\widetilde{\sigma}_w^2$ | <b>1.7219</b>  | <b>0.5659</b>  | <b>0.9584</b>  |
| $\langle uw \rangle$     | <b>-0.2987</b> | <b>-0.0938</b> | <b>-0.2515</b> |

Tabelle 4: Resultate der anisotropen Beispielrechnungen

Aus den Ergebnissen zeigt sich, dass das Verhältnis der Varianzen untereinander in Beispiel 7 nicht erfüllt wird. Um dieses Problem zu beheben, wurde in Beispiel 8 die Schranke für die Berechnung der Koeffizienten von  $L_2, L_3 < 8L$  auf  $L_2, L_3 < 12L$  erhöht. Das Erhöhen dieser Schranke führt dazu, dass die Koeffizienten für den Bereich  $\|\mathbf{k}\| \leq 3/L$  nach der Gleichung (3.21) berechnet werden und nicht Gleichung (3.16) als Schätzung genutzt wird. Wie zu erkennen ist, führt dies zu einer Verbesserung in den geschätzten Varianzen, aber auch zu einem kleineren Wert für die Kovarianz zwischen  $u$  und  $w$ .

Eine andere Möglichkeit ist die Veränderung der Größe des simulierten Feldes. Wie in Beispiel 9 dargestellt, wurden gegenüber Beispiel 7, die Breite und Höhe des Windfeldes von 500 m auf 800 m erhöht. Dies führt ebenfalls zu einer Verbesserung der geschätzten Varianzen. Dabei ist jedoch festzustellen, dass  $\widetilde{\sigma}_v^2$  und  $\widetilde{\sigma}_w^2$  näher beieinander liegen und die Kovarianz zwischen  $u$  und  $w$  näher an der Kovarianz aus Beispiel 7 liegt als in Beispiel 8.

### Beispiele 10 bis 14

Anhand der Beispiele 10 bis 14 soll gezeigt werden, wie sich die geschätzten Varianzen und Kovarianzen in Abhängigkeit von dem Parameter  $\hat{\Gamma}$  verhalten. Diese werden dabei alle durch die theoretische Varianz  $\sigma_{iso}^2$  aus dem entsprechenden isotropen Fall dividiert. Die verwendeten Eingangsdaten sind in Tabelle 5 und die daraus resultierenden Ergebnisse in Tabelle 6 erkennbar.

|           | Beispiel 10 | Beispiel 11 | Beispiel 12 | Beispiel 13 | Beispiel 14 |
|-----------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|
| $L_1$     | 2000        | 2000        | 2000        | 2000        | 2000        |
| $L_2$     | 300         | 400         | 400         | 400         | 400         |
| $L_3$     | 300         | 400         | 400         | 400         | 400         |
| $N_1$     | 1024        | 1024        | 1024        | 1024        | 1024        |
| $N_2$     | 32          | 32          | 32          | 32          | 32          |
| $N_3$     | 32          | 32          | 32          | 32          | 32          |
| $U_{ref}$ | 15          | 15          | 15          | 10          | 15          |
| $z_{ref}$ | 40          | 165         | 250         | 153         | 300         |
| Position  | über Meer   | über Meer   | über Meer   | über Land   | über Land   |

Tabelle 5: Eingangsparameter für Berechnungen in Abhängigkeit des Parameters  $\hat{\Gamma}$

|   | Beispiel 10 | Beispiel 11   | Beispiel 12   | Beispiel 13   | Beispiel 14 |
|---|-------------|---------------|---------------|---------------|-------------|
| $L$   | 38          | 57.9961       | 79.5972       | 22.0716       | 54          |
| $\alpha\epsilon^{2/3}$                          | 0.18        | 0.0612        | 0.0418        | 0.01          | 0.01        |
| $\hat{\Gamma}$                                  | <b>4.53</b> | <b>4.0126</b> | <b>2.9899</b> | <b>2.0139</b> | <b>1</b>    |
| $\sigma_{iso}^2$                                | 1.4004      | 0.6316        | 0.5322        | 0.0542        | 0.0983      |
| $\widetilde{\sigma}_u^2/\sigma_{iso}^2$         | 2.7939      | 2.1436        | 1.3143        | 1.1061        | 0.7738      |
| $\widetilde{\sigma}_v^2/\sigma_{iso}^2$         | 1.122       | 1.1539        | 1.0673        | 0.8588        | 0.7569      |
| $\widetilde{\sigma}_w^2/\sigma_{iso}^2$         | 0.5616      | 0.5332        | 0.6264        | 1.0398        | 0.6373      |
| $\widetilde{\langle uw \rangle}/\sigma_{iso}^2$ | -0.3309     | -0.2454       | -0.2127       | -0.38         | -0.0478     |

Tabelle 6: Resultate bei Variation von  $\hat{\Gamma}$

Um das Verhalten der geschätzten Varianzen und Kovarianz  $\langle uw \rangle$  besser beurteilen zu können, sind die Ergebnisse aus den Beispielen in Abbildung 15 auf der rechten Seite dargestellt. Zum Vergleich sind auf der linken Seite der Abbildung nochmals die theoretischen Werten von Jakob Mann (siehe [1]) zu sehen.

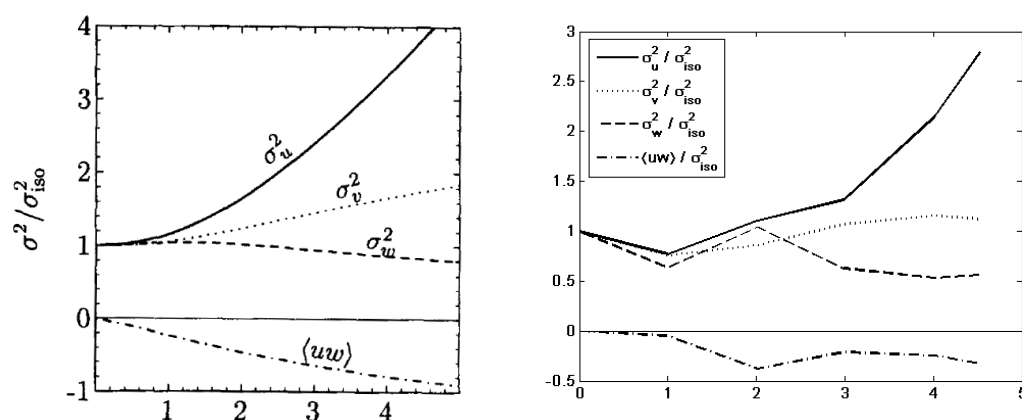


Abbildung 15: Verhalten der Varianzen

Es ist zu erkennen, dass sich die geschätzten Varianzen bis auf Ausnahmen ähnlich wie die vorgegebenen Varianzen verhalten. Leichte Schwankungen in den Ergebnissen sind auf die in der Simulation verwendeten Zufallszahlen zurückzuführen.

Aus den in diesem Abschnitt dargestellten Ergebnissen lässt sich erkennen, dass Modell von Mann mit den entsprechenden Parametern Windfelder simuliert, welche die Eigenschaften von Windfeldern aus der Natur erfüllen. Im Gegensatz dazu kann man feststellen, dass für schlecht gewählte Parameter die Eigenschaften aus der Natur verletzt werden.

Die Rechenzeiten für die aufgeführten Beispiele liegen im Bereich von fünf bis 30 Minuten. Für die Dauer einer Simulation mit dem Verfahren von Jakob Mann ist es entscheidend, nach welcher Vorgehensweise die Koeffizienten  $C(\mathbf{k})$  berechnet werden.



### 5.3 Vergleich der beiden Simulationsmethoden

Für einen Vergleich der Simulationverfahren von Veers und Mann mussten diese aneinander angepasst werden. Dazu wurden die Eingangsdaten entsprechend angepasst und die Ein-Punkt-Spektren des Mann-Verfahrens an die *Sandia-Methode* übergeben.

Es wurde ein Windfeld mit den Maßen  $L_1 = 7000$  m,  $L_2 = 150$  m und  $L_3 = 150$  m gewählt. Bei dem Verfahren von Mann wurde dieses dreidimensionale Windfeld mit einem Gitter von  $2048 \times 12 \times 12$  Stützstellen abgetastet. Daraus ergaben sich für das Modell von Veers 144 Zeitreihen mit 2048 Zeitschritten. Des Weiteren wurde eine Referenzgeschwindigkeit von  $U_{ref} = 14 \text{ ms}^{-1}$  in einer Höhe von  $z_{ref} = 90$  m gewählt. Somit gilt für die restlichen Parameter des Mann-Modells:

$$L = 22.4209$$

$$\alpha \epsilon^{2/3} = 0.0382.$$

Mit diesen Parametern haben die Ein-Punkt-Spektren von Jakob Mann im isotropen Fall die Form:

$$F_1(k_1) = \frac{1.1144}{(1 + 502.6968k_1^2)^{5/6}}$$

$$F_2(k_1) = F_3(k_1) = 0.1857 \frac{3 + 4021.6k_1^2}{(1 + 502.6968k_1^2)^{11/6}}.$$

Diese Spektren wurden in Form einer Wertetabelle mit der theoretischen Varianz  $\sigma_{iso}^2 = 0.2091$  an die *Sandia-Methode* übergeben.

Mit den beschriebenen Eingangsdaten ergaben sich folgende Varianzschätzungen für das Verfahren von Mann:

$$\widetilde{\sigma}_u^2 = 0.2273, \quad \widetilde{\sigma}_v^2 = 0.28, \quad \widetilde{\sigma}_w^2 = 0.2715$$

$$\frac{\widetilde{\sigma}_u^2}{\sigma_{iso}^2} = 1.087, \quad \frac{\widetilde{\sigma}_v^2}{\sigma_{iso}^2} = 1.3391, \quad \frac{\widetilde{\sigma}_w^2}{\sigma_{iso}^2} = 1.2984.$$

Die *Sandia-Methode* lieferte für die Varianzschätzungen:

$$\widetilde{\sigma}_u^2 = 0.2064, \quad \widetilde{\sigma}_v^2 = 0.2105, \quad \widetilde{\sigma}_w^2 = 0.2085$$

$$\frac{\widetilde{\sigma}_u^2}{\sigma_{iso}^2} = 0.9871, \quad \frac{\widetilde{\sigma}_v^2}{\sigma_{iso}^2} = 1.0067, \quad \frac{\widetilde{\sigma}_w^2}{\sigma_{iso}^2} = 0.9971.$$

Wie an den geschätzten Varianzen der beiden Verfahren zu erkennen ist, liefern beide Methoden ähnliche Ergebnisse, wobei jedoch die Schätzungen des

Modells von Veers näher an der theoretischen Varianz liegen als die Schätzungen des Mann-Modells.

Eine andere Vergleichsmöglichkeit bieten die Kovarianzen zwischen einzelnen Zeitreihen. Dabei ergeben sich für ausgewählte Zeitreihen der Schwankungskomponente  $u$  im Fall des Verfahrens von Mann:

$$\begin{aligned}\widetilde{cov}(u(x, N_2/2, N_3/2), u(x, N_2/2, N_3/2 + 1)) &= 0.1071 \\ \widetilde{cov}(u(x, N_2/2, N_3/2), u(x, N_2/2 + 1, N_3/2)) &= 0.0861 \\ \widetilde{cov}(u(x, N_2/2, N_3/2), u(x, N_2/2, N_3/2 - 1)) &= 0.0872 \\ \widetilde{cov}(u(x, N_2/2, N_3/2), u(x, N_2/2 - 1, N_3/2)) &= 0.1126 \\ \widetilde{cov}(u(x, N_2/2, N_3/2), u(x, N_2/2 + 2, N_3/2)) &= -0.0147 \\ \widetilde{cov}(u(x, N_2/2, N_3/2), u(x, N_2/2, N_3/2 - 2)) &= -0.0292.\end{aligned}$$

Bei der *Sandia-Methode* gilt für die Kovarianzen zwischen den entsprechenden Zeitreihen:

$$\begin{aligned}\widetilde{cov}(u_{66}, u_{78}) &= 0.0501, \quad \widetilde{cov}(u_{66}, u_{67}) = 0.0899 \\ \widetilde{cov}(u_{66}, u_{54}) &= 0.0628, \quad \widetilde{cov}(u_{66}, u_{65}) = 0.0588 \\ \widetilde{cov}(u_{66}, u_{68}) &= 0.0511, \quad \widetilde{cov}(u_{66}, u_{42}) = 0.0438.\end{aligned}$$

Aus diesen Werten ist zu erkennen, dass ein größerer Zusammenhang zwischen den Zeitreihen bei dem Mann-Modell besteht als bei der *Sandia-Methode*.

## 5.4 Fehlerdiskussion

Die Abweichung der geschätzten Varianzen von der theoretisch errechneten in Beispiel 2 ist auf das Energiespektrum  $E(k)$  aus Gleichung (3.8) und die Abtastschrittweite  $k$  zurückzuführen. Das Verhalten des Spektrums in Abhängigkeit der Parameter  $L$  und  $\alpha\epsilon^{2/3}$  ist in Abbildung 16 dargestellt.

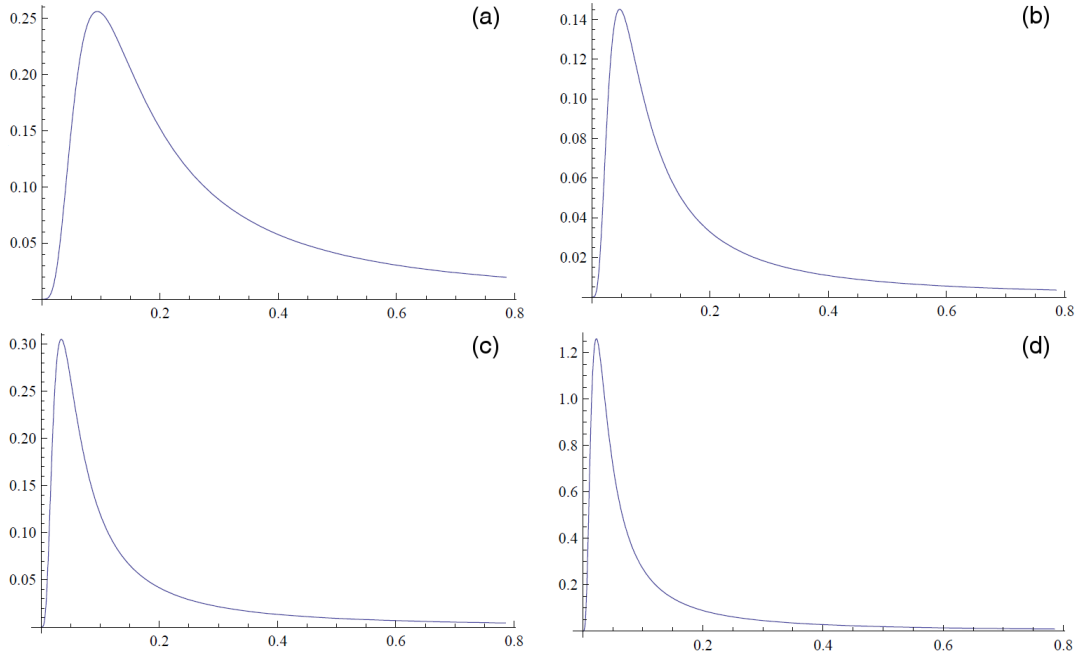


Abbildung 16: Energiespektrum für

- (a)  $L = 16.5$ ,  $\alpha\epsilon^{2/3} = 0.22$  (Bsp. 1);
- (b)  $L = 32.8125$ ,  $\alpha\epsilon^{2/3} = 0.0788$  (Bsp. 2, Bsp. 3);
- (c)  $L = 45.2305$ ,  $\alpha\epsilon^{2/3} = 0.1337$  (Bsp. 4);
- (d)  $L = 68.1016$ ,  $\alpha\epsilon^{2/3} = 0.4206$

Aus dem Verlauf des Energiespektrums für verschiedene Parameterwerte ist erkennbar, dass das Maximum mit größer werdendem  $L$  und  $\alpha\epsilon^{2/3}$  einen größeren Wert annimmt und näher bei Null liegt. In Verbindung mit der Abtastschrittweite kommt es zu einer Verfälschung der Ergebnisse. In Abbildung 17 sind jeweils die ersten 10 Abtastpunkte dargestellt. Auf der linken Seite sind die Werte für  $L_1$ ,  $L_2$  und  $L_3$  aus Beispiel 2 genutzt worden und rechts aus Beispiel 3.

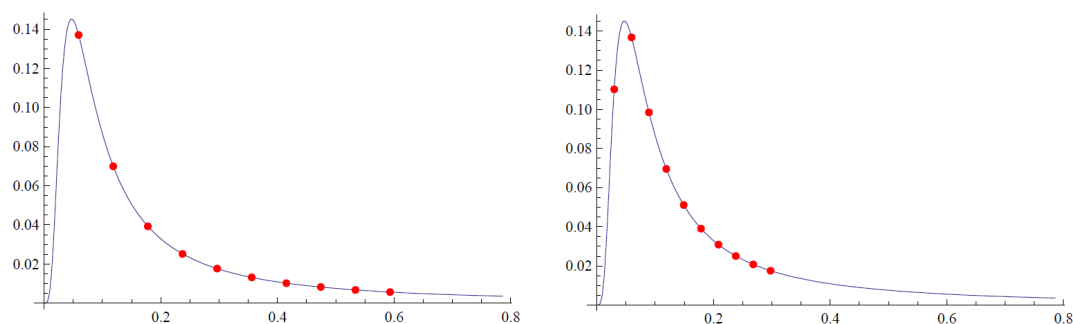


Abbildung 17: Abtastpunkte des Energiespektrums mit  $L = 32.8125$ ,  
 $\alpha\epsilon^{2/3} = 0.0788$  (links - Bsp. 2, rechts - Bsp. 3)

Es ist zu erkennen, dass das Maximum des Energiespektrums in Beispiel 2 nur sehr grob abgetastet wird. Aus diesem Grund kommt es zu einer Verfälschung der geschätzten Varianzen. Wie im rechten Teil von Abbildung 17 zu sehen ist, wird im dritten Beispiel das Energiespektrum genauer abgetastet und anhand der im vorangehenden Abschnitt vorgestellten Ergebnisse ist auch eine Verbesserung der geschätzten Varianzen eingetreten.

## Zusammenfassung

Die Zielstellung dieser Diplomarbeit bestand in der Entwicklung eines Programms für die Simulation eines dreidimensionalen Windfeldes nach dem von Jakob Mann vorgestellten Verfahren. Dieses Programm wurde mit Hilfe von *MatLab* erstellt, weil viele der benötigten Algorithmen hier bereits in entsprechender Form vorhanden sind.

Zur Simulation von stochastischen Windfeldern gibt es verschiedene Verfahren. Neben dem Verfahren von Mann stellte Paul S. Veers 1984 ein Verfahren vor, welches auch unter dem Namen *Sandia-Methode* bekannt ist.

Bei dem Verfahren von Mann wird ein stochastisches Windfeld in einem dreidimensionalen Gebiet simuliert. Dabei wird dieses Gebiet mit einem räumlichen Gitter überdeckt und es werden die stochastischen Schwankungen um den mittleren Wind an den Gitterpunkten berechnet. Mit dieser Vorgehensweise ergibt sich als Ergebnis ein dreidimensionales Vektorfeld mit den Schwankungskomponenten an jedem Punkt. Aus dem Vektorfeld der Ergebnisse lassen sich anschließend Zeitreihen für die einzelnen Schwankungskomponenten erzeugen.

Bei der *Sandia-Methode* wird ein stochastisches Windfeld direkt in der Form von Zeitreihen erzeugt. Es wird dabei von einem zweidimensionalen Gitter in der  $y$ - $z$ -Ebene ausgegangen und die Zeitreihen werden in  $x$ -Richtung (Hauptwindrichtung) an verschiedenen Zeitpunkten berechnet. Für jede der Schwankungskomponenten müssen die Zeitreihen simuliert werden. Nimmt man alle Werte der Zeitreihen an den jeweiligen Zeitpunkten, entsteht ein ähnliches räumliches Gitter wie bei dem Verfahren von Mann.

Der Vorteil des Mann-Modells gegenüber dem Modell von Veers sind die angenommenen Voraussetzungen. Durch die Voraussetzungen wird bei dem Verfahren von Mann gesichert, dass das simulierte Windgeschwindigkeitsfeld quellfrei ist. Diese Voraussetzungen sind bei der *Sandia-Methode* nicht erfüllt und somit kann das erzeugte Windfeld auch nicht als quellfrei angenommen werden.

Aufgrund dessen, dass sich aus den Ergebnissen des Mann-Modells Zeitreihen erzeugen lassen, welche dieselbe Struktur wie die Zeitreihen des Veers-Modells haben, können alle nach der Simulation folgenden Berechnung unverändert ausgeführt werden. Daraus folgt, dass für die Berechnung der Windlasten an einer Windkraftanlage nur die Simulationsmethode für das Windfeld gewählt werden muss.

Durch die physikalischen Eigenschaften ist nach meinem Erachten das Mann-Modell der *Sandia-Methode* vorzuziehen. Ein Vergleich der Rechenzeiten beider Verfahren war im Rahmen dieser Arbeit nicht möglich, da das Modell von Veers in *C* implementiert und das Modell von Mann mit Hilfe von *MatLab*

umgesetzt wurde. Nach dem derzeitigen Stand benötigt die *Sandia-Methode* weniger als eine Minute für eine Simulation, wo hingegen das Mann-Modell in Abhängigkeit von den gewählten Parametern zwischen fünf und 30 Minuten benötigt.

Für die Betreuung dieser Diplomarbeit möchte ich mich bei Herrn Dr. Uwe Jungnickel und Herrn Dipl.-Math. Matthias März vom Institut für Mechatronik, sowie bei Frau Prof. Dr. Cordula Bernert von der Hochschule Mittweida bedanken.

## A Anhang

### A.1 ensemble average

In diesem Abschnitt wird das *ensemble average* nach der Variante laut Batchelor [5] erläutert.

Die Windgeschwindigkeit  $\mathbf{u}$  kann als Zufallsvariable interpretiert und auf jeden Punkt  $(\mathbf{x}, t)$  angewendet werden. Im Allgemeinen existiert dabei eine statistische Verbindung zwischen den zufälligen Werten von  $\mathbf{u}$ . Diese Verbindung wird durch die gemeinsame Wahrscheinlichkeitsverteilung der Werte von  $\mathbf{u}$  spezifiziert.

Es wird eine mathematische Wahrscheinlichkeit (*probability average* oder *ensemble average*) definiert, indem auf die gemeinsamen Wahrscheinlichkeitsverteilungen der Werte von  $\mathbf{u}$  Bezug genommen wird. Wenn  $F(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$  eine Funktion von  $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$  mit den Windgeschwindigkeiten an den Punkten  $(\mathbf{x}_1, t_1), \dots, (\mathbf{x}_n, t_n)$  ist, ist  $F$  eine Zufallsvariable und das *ensemble average* kann definiert werden als:

$$\langle F(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n) \rangle = \int \cdots \int F P(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n) d\mathbf{u}_1 \dots \mathbf{u}_n. \quad (\text{A.1})$$

Hierbei steht  $P(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$  für die gemeinsame Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion der Werte  $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$ .

Wenn die Turbulenzen im Raum homogen sind, dann ist  $\mathbf{u}(\mathbf{x})$  eine stationäre, zufällige Funktion. Daraus folgt, dass  $P(\mathbf{u}(\mathbf{x}_1, t_1), \dots, \mathbf{u}(\mathbf{x}_n, t_n))$  unabhängig von der Position im Raum ist. Dies bedeutet, dass die gemeinsame Wahrscheinlichkeitsverteilung an  $n$  Stellen  $(\mathbf{x}_1 + \mathbf{y}, t_1), \dots, (\mathbf{x}_n + \mathbf{y}, t_n)$  unabhängig von dem Vektor  $\mathbf{y}$  ist. Aus diesem Grund ist auch die Mittlung  $\langle F \rangle$  von der Position der  $n$  Stellen im Raum unabhängig.

Die räumliche Homogenität besagt, dass alle Gebiete im Raum gleich sind bezüglich der statistischen Eigenschaften von  $\mathbf{u}$ . Aus dieser Eigenschaft folgt, dass das Resultat der Mittlung über eine große Anzahl von Realisierungen auch durch die Mittlung über ein großes, räumliches Gebiet für eine Realisierung erhalten werden kann. Diese räumliche Mittlung wird *space average* genannt und hat die Form:

$$\lim_{V \rightarrow \infty} \frac{1}{V} \int F(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n) d\mathbf{y}. \quad (\text{A.2})$$

Die Werte  $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$  stehen für die Windgeschwindigkeiten des turbulenten Feldes an den Stellen  $(\mathbf{x}_1 + \mathbf{y}, t_1), \dots, (\mathbf{x}_n + \mathbf{y}, t_n)$  für jede Realisierung und  $V$  bezeichnet das Volumen des  $\mathbf{y}$ -Raumes, über dem integriert wird. Für diese

Art der Mittlung ist es wichtig, dass der Grenzwert existiert und unabhängig von der Definition von  $V$  ist.

Da  $F(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$  eine Funktion von Zufallsgrößen ist und somit wieder eine Zufallsgröße repräsentiert, kann diese Funktion als stochastischer Prozess aufgefasst werden. Erfüllt die Funktion die Bedingungen, dass

1.  $F$  beschränkt und
2. im quadratischen Mittel stetig ist,

dann können das *ensemble average* (Gleichung (A.1)) und das *space average* (Gleichung (A.2)) als identisch angesehen werden.

## A.2 Herleitung des isotropen Spektraltensors

Ausgangspunkt für die Herleitung des isotropen Spektraltensors ist der Geschwindigkeitskorrelationstensor

$$R_{ij}(\mathbf{r}) = \langle u_i(\mathbf{x})u_j(\mathbf{x} + \mathbf{r}) \rangle.$$

Da es sich um einen isotropen Tensor zweiter Stufe handelt, kann dieser in der Form

$$R_{ij}(\mathbf{r}) = F(r)r_i r_j + G(r)\delta_{ij} \quad (\text{A.3})$$

dargestellt werden. Hierbei sind  $F$  und  $G$  beliebige gerade, skalare Funktionen, welche nur von  $r = \|\mathbf{r}\|$  abhängig sind. Die Kontinuitätsbedingung

$$\sum_{i=1}^3 \frac{\partial R_{ij}(\mathbf{r})}{\partial r_i} = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial R_{ij}(\mathbf{r})}{\partial r_j} = 0$$

muss von dem Geschwindigkeitskorrelationstensor  $R_{ij}(\mathbf{r})$  erfüllt werden und mit

$$\frac{\partial R_{ij}(\mathbf{r})}{\partial r_i} = \begin{cases} 2r_i F(r) + r_i^2 \frac{\partial F(r)}{\partial r_i} + \frac{\partial G(r)}{\partial r_i} & , \text{für } i = j \\ r_j F(r) + r_i r_j \frac{\partial F(r)}{\partial r_i} & , \text{für } i \neq j \end{cases}$$

folgt

$$\sum_{i=1}^3 \frac{\partial R_{ij}(\mathbf{r})}{\partial r_i} = r_j \left( 4F + r \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial G}{\partial r} \right) = 0. \quad (\text{A.4})$$



Da die Gleichung (A.4) für alle Werte von  $\mathbf{r}$  gelten muss, wird durch

$$4F + r \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial G}{\partial r} = 0$$

gezeigt, dass nur skalare Funktionen benötigt werden, um die Geschwindigkeitskorrelation zu spezifizieren, wenn es sich um isotrope Turbulenzen handelt.

Weil es sich bei dem Spektraltensor  $\Phi_{ij}(\mathbf{k})$  ebenfalls um einen isotropen Tensor zweiten Grades handelt, kann er in Analogie zu Gleichung (A.3) in folgender Form dargestellt werden:

$$\Phi_{ij}(\mathbf{k}) = A(k)k_i k_j + B(k)\delta_{ij}$$

$A$  und  $B$  sind hier beliebige, gerade Funktion in Abhängigkeit von  $k = \|\mathbf{k}\|$ . Für diesen Tensor lautet die Kontinuitätsbedingung:

$$\sum_{i=1}^3 k_i \Phi_{ij}(\mathbf{k}) = \sum_{j=1}^3 k_j \Phi_{ij}(\mathbf{k}) = 0,$$

woraus folgt, dass

$$\sum_{i=1}^3 k_i \Phi_{ij}(\mathbf{k}) = (k_1 + k_2 + k_3)(B(k) + (k_1^2 + k_2^2 + k_3^2)A(k)) = 0$$

ist und somit

$$B(k) = -k^2 A(k)$$

gelten muss. Daraus ergibt sich:

$$\Phi_{ij}(\mathbf{k}) = A(k)(k_i k_j - k^2 \delta_{ij}). \quad (\text{A.5})$$

Des Weiteren ist

$$\begin{aligned} e(k) &= \sum_{i=1}^3 \frac{1}{2} \Phi_{ii}(\mathbf{k}) = \sum_{i=1}^3 \frac{1}{2} (A(k)k_i^2 + B(k)) \\ &= \frac{1}{2} (k^2 A(k) + 3B(k)) = -k^2 A(k). \end{aligned}$$

Dieser Ausdruck stellt die Energiespektraldichte dar, so dass das Energiespektrum  $E(k)$  in der folgenden Form angenommen werden kann:

$$E(k) = 4\pi k^2 * \sum_{i=1}^3 \frac{1}{2} \Phi_{ii}(\mathbf{k}) = -4\pi k^4 A(k).$$

Durch Umstellen nach  $A(k)$  ergibt sich dann

$$A(k) = -\frac{E(k)}{4\pi k^4}.$$

Aus der Gleichung (A.5) entsteht damit die allgemeine Form des isotropen Spektraltensors:

$$\Phi_{ij}(\mathbf{k}) = -\frac{E(k)}{4\pi k^4} (k_i k_j - k^2 \delta_{ij}) = \frac{E(k)}{4\pi k^4} (k^2 \delta_{ij} - k_i k_j).$$

## B Bezeichnungen und Erklärungen

### B.1 Bezeichnungen

|  |   |
|--|---|
| $i$                                    | ... imaginäre Einheit, $i = \sqrt{-1}$  |
| $X_T, X(t)$                            | ... stochastischer Prozess mit $t \in T \subset \mathbb{R}$   |
| $\mathbf{T}$                           | ... Tensor mit den Elementen $t_{ij\dots m}$  |
| $\mathbf{x} = (x, y, z)^T$             | ... Koordinaten eines Punktes in einem Rechtssystem   |
| $\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t)$      | ... turbulentes Geschwindigkeitsfeld in Abhängigkeit von $\mathbf{x}$ und $t$   |
| $\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{x})$         | ... turbulentes Geschwindigkeitsfeld in Abhängigkeit von $\mathbf{x}$   |
| $\mathbf{u}(\mathbf{x}) = (u, v, w)^T$ | ... Windschwankungen ( $\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) - \mathbf{U}$ )                         |
| $\mathbf{U} = (U(z), 0, 0)$            | ... Vektordarstellung des mittleren Windes  |
| $U(z)$                                 | ... mittlere Windgeschwindigkeit  |
| $U_{10}$                               | ... mittlere Windgeschwindigkeit bei $z = 10m$  |
| $U_m$                                  | ... Mittlung der mittleren Windgeschwindigkeit über die Höhe $z$  |
| $R_{ij}(\mathbf{r})$                   | ... Geschwindigkeitskorrelationstensor oder auch Kovarianztensor  |
| $\mathbf{r} = (r_1, r_2, r_3)^T$       | ... Abstandsvektor zwischen zwei Punkten mit $r = \ \mathbf{r}\ $   |
| $\Phi_{ij}(\mathbf{k})$                | ... Spektraltensor  |
| $\mathbf{k} = (k_1, k_2, k_3)^T$       | ... Wellenvektor mit $k = \ \mathbf{k}\ $ und $k_1 = \frac{2\pi f}{U}$  |
| $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}$          | ... Skalarprodukt zwischen $\mathbf{k}$ und $\mathbf{r}$  |
| $\mathbf{Z}(\mathbf{k})$               | ... stochastisches Vektorfeld   |
| $\mathbf{Z}(\mathbf{k})^{\text{iso}}$  | ... isotropes stochastisches Vektorfeld   |
| $Z_i^*$                                | ... konjugiert komplexe Form von $Z_i$ , $i = 1, 2, 3$  |
| $\chi_{ij}$                            | ... Kreuzspektrum zwischen $u_i$ und $u_j$  |
| $coh_{ij}$                             | ... Kohärenzfunktion zwischen $u_i$ und $u_j$   |
| $F(k)$                                 | ... Spektrum als Funktion der Wellenzahl $k$  |
| $S(f)$                                 | ... Spektrum als Funktion der Frequenz $f$  |
| $E(k)$                                 | ... Energiespektrum   |
| $L$                                    | ... Längenskalierung  |
| $\alpha$                               | ... Kolmogorov-Konstante mit dem Wert $\approx 1.7$   |
| $\epsilon$                             | ... Zerteilungsrate der turbulenten, kinetischen Energie  |
| $p = p(\mathbf{x}, t)$                 | ... Druck in Abhängigkeit von $\mathbf{x}$ und $t$  |
| $\rho$                                 | ... Dichte  |
| $\nu$                                  | ... kinematische Viskosität   |
| $\delta_{ij}$                          | ... Kronecker-Symbol: $\delta_{ij} \begin{cases} 1, & \text{falls } i = j \\ 0, & \text{falls } i \neq j \end{cases}$ |

|   |  |
|---|--|
| $\Gamma(q)$   | ... Euler'sche Gamma-Funktion an der Stelle $q$                                  |
| $\tau$  | ... Lebensdauer eines Wirbels  |
| $\beta$   | ... dimensionslose Lebensdauer eines Wirbels                                     |
| $\widehat{\Gamma}$  | ... Parameter im Schermodell des Spektraltensors                                 |
| $\sigma_u^2, \sigma_v^2, \sigma_w^2$  | ... Varianzen von $u, v$ und $w$   |
| $\widetilde{\sigma}_u^2, \widetilde{\sigma}_v^2, \widetilde{\sigma}_w^2$                    | ... Varianzschätzungen von $u, v$ und $w$  |
| $\langle uw \rangle$  | ... Kovarianz zwischen $u$ und $w$   |
| $\widetilde{\langle uw \rangle}$  | ... Kovarianzschätzung zwischen $u$ und $w$                                      |
| $\widetilde{cov}(u_i, u_j)$   | ... Schätzung der Kovarianz zwischen der $i$ -ten und $j$ -ten Zeitreihe von $u$ |
| $C_{ij}$  | ... Koeffizienten im Frequenzbereich   |
| $n_j(\mathbf{k})$   | ... unabhängige, komplexe, normalverteilte Zufallsvariablen mit $\sigma^2 = 1$   |
| $B$   | ... dreidimensionaler Bereich, in dem das Windfeld simuliert wird                |
| $L_1, L_2, L_3$   | ... Länge des Bereiches $B$ in $x$ -, $y$ - und $z$ -Richtung                    |
| $N_1, N_2, N_3$   | ... Anzahl der Stützstellen in $x$ -, $y$ - und $z$ -Richtung                    |
| $\left  \frac{\partial(\mathbf{r}, \mathbf{s})}{\partial(\mathbf{x}, \mathbf{x}')} \right $ | ... Determinante der Jakobimatrix  |
| $N$   | ... Summe aller Stützstellen im Raum   |
| $S$   | ... Spektralmatrix   |
| $S_{jj}$  | ... diskrete spektrale Leistungsdichte im Punkt $j$                              |
| $G_{jj}$  | ... stetige spektrale Leistungsdichte im Punkt $j$                               |
| $S_{ij}$  | ... Kreuzspektraldichte zwischen den Punkten $i$ und $j$                         |
| $\Delta r_{ij}$   | ... Abstand zwischen den Punkten $i$ und $j$                                     |
| $f_m$   | ... Frequenz des $m$ -ten Frequenzbandes   |
| $T_{sim}$   | ... Simulationsdauer   |
| $\Delta t$  | ... Zeitschrittweite   |
| $H$   | ... Transformationsmatrix ( $S = HH^{*T}$ )                                      |
| $u_j$   | ... Schwankungen um den mittleren Wind in Form von einer Zeitreihe im Punkt $j$  |

## B.2 Erklärungen

### Affine Koordinaten (siehe [27])

Bei affinen Koordinaten handelt es sich um eine Verallgemeinerung von kartesischen Koordinaten auf ein System aus drei linear unabhängigen Grundvektoren  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$  und  $\mathbf{e}_3$  mit den Koeffizienten  $a^1, a^2$  und  $a^3$ , wobei die oberen Indizes nicht als Exponenten aufzufassen sind. Diese Vektoren müssen nicht mehr zwingend rechtwinklig zueinander stehen.

### Dirichletsche Bedingungen (siehe [27])

Wenn die Funktion  $f(x)$  die Dirichletschen Bedingungen,

1. dass das Definitionsintervall in endlich viele Intervalle zerlegt werden kann, in denen  $f(x)$  monoton und stetig ist und
2. dass an jeder Unstetigkeitsstelle von  $f(x)$  die Werte  $f(x+0)$  und  $f(x-0)$  definiert sind,

erfüllt, dann konvergiert die Fourier-Reihe der Funktion. Der Summenwert der Reihe ist an den Stellen, wo  $f(x)$  stetig ist, gleich  $f(x)$  und an den Unstetigkeitsstellen gleich  $\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}$ .

### Euler'sche Gamma-Funktion (siehe [27])

Die Euler'sche Gamma-Funktion ist das Euler'sche Integral zweiter Gattung. Mit dieser Funktion kann der Fakultäts-Begriff bis zu den komplexen Zahlen ausgedehnt werden. Die Gamma-Funktion kann auf zwei Arten definiert werden:

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt, \quad x > 0 \text{ oder}$$

$$\Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^n n!}{x(x+1)\dots(x+n)}, \quad x \neq 0, -1, -2, \dots$$

### Frequenzband

Eine Frequenzband bezeichnet einen Frequenzbereich und somit einen Teilbereich des Spektrums.

### Isotropie

Isotropie bedeutet, dass eine Eigenschaft eines Systems unabhängig von der betrachteten Richtung im Raum ist. Das Gegenteil von Isotropie ist die Anisotropie.

**Kreuzspektrum** (siehe [21])

Das Kreuzspektrum zweier Funktionen  $f$  und  $g$  ist definiert als

$$\chi_{fg}(s) = \frac{F(s) \times G(s)}{\sqrt{\int |F(s)|^2 ds \int |G(s)|^2 ds}},$$

wobei  $F(s) \times G(s)$  für die Korrelation zwischen  $F(s)$  und  $G(s)$  steht.  $F$  bezeichnet die Fourier-Transformierte von  $f$ .

**Kriterium von Dirichlet-Jordan** (siehe [28])

Wenn die nichtperiodische Funktion  $f(t)$  die Bedingungen erfüllt, dass

1.  $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty$  und dass
2.  $f(t)$  nur endlich viele endliche Sprungstellen besitzt, an denen  $f(t+0)$  und  $f(t-0)$  existieren und dem Fourier-Integral dort  $\frac{f(t+0)+f(t-0)}{2}$  zugeordnet wird,

dann konvergiert das Fourier-Integral dieser Funktion.

**Satz von Cramér** (siehe [13])

Wenn eine normalverteilte Zufallsgröße  $X$  die Summe von zwei unabhängigen Zufallsgrößen  $Y$  und  $Z$  ist, dann sind diese beiden Zufallsgrößen ebenfalls normalverteilt.

**Statistiken zweiter Ordnung** (siehe [17])

Statistiken zweiter Ordnung befassen sich mit den Momentenfunktionen von stochastischen Prozessen. Ausgangspunkt dafür sind der Erwartungswert  $m_X(t) = EX(t)$  und die Varianz  $\sigma_X^2(t) = E(X(t) - \mu)^2$ .

**Stetigkeit im quadratischen Mittel** (siehe [11])

Ein stochastischer Prozess  $X_T$  zweiter Ordnung ist in einem Punkt  $t_0$  im quadratischen Mittel stetig, wenn gilt:

$$\lim_{h \rightarrow 0} E([X(t_0 + h) - X(t_0)]^2) = 0.$$

Gilt diese Bedingung für alle Punkte  $t_0 \in T$ , dann wird  $X_T$  im quadratischen Mittel stetig genannt.

**Vektorfeld** (siehe [22])

Ein Vektorfeld  $v$  ist eine Abbildung  $v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ , wobei jedem Punkt  $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^m$  ein Vektor  $v(x) \in \mathbb{R}^n$  zugeordnet wird.

**Verbundwahrscheinlichkeit** (siehe [24])

Es seien  $A$  und  $B$  zwei Ereignisse. Dann steht  $P(A \cap B)$  (oder auch  $P(A, B)$ ) für die gemeinsame Wahrscheinlichkeit oder Verbundwahrscheinlichkeit. Für zwei stochastisch unabhängige Ereignisse gilt:

$$P(A \cap B) = P(A)P(B).$$

**Weißes Rauschen** (siehe [10])

Weißes Rauschen ist in der Stochastik ein diskreter stochastischer Prozess von unkorrelierten Zufallsvariablen mit dem Erwartungswert 0 und einer konstanten Varianz.

## C Tabellen

### C.1 Wertetabellen für Windfelder über dem Meer

| $z \backslash U$ | 10   | 15   | 20   | 25   | 30   | 40   | 50  | 60   | 70   |
|------------------|------|------|------|------|------|------|-----|------|------|
| 5                | 8.2  | 8.7  | 8.95 | 9.05 | 9.1  | 9.2  | 9.3 | 9.5  | 9.6  |
| 10               | 16.5 | 17.5 | 18.5 | 19.5 | 20.5 | 21.5 | 22  | 22.5 | 23   |
| 15               | 21   | 24   | 26.5 | 28.5 | 30   | 32   | 33  | 34   | 35   |
| 25               | 26   | 33   | 37   | 42   | 45   | 50.5 | 54  | 56.5 | 58   |
| 40               | 31   | 38   | 46   | 52   | 58   | 66   | 76  | 82   | 87.5 |
| 80               | 39   | 47.5 | 56   | 62   | 71   | 86   | 100 | 113  | 125  |
| 120              | 46   | 54   | 62   | 71   | 79   | 93   | 108 | 123  | 136  |
| 180              | 60   | 62   | 71   | 80   | 89   | 104  | 118 | 133  | 145  |
| 300              | 113  | 98   | 95   | 96   | 103  | 118  | 133 | 146  | 165  |

Tabelle 8: Parameter  $L$  für ein Windfeld über dem Meer

| $z \backslash U$ | 10     | 15    | 20    | 25    | 30    | 40    | 50    | 60    | 70   |
|------------------|--------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|------|
| 5                | 0.39   | 0.8   | 1.45  | 2.1   | 2.9   | 4.9   | 7.5   | 10.9  | 15.1 |
| 10               | 0.22   | 0.43  | 0.71  | 1.1   | 1.6   | 2.6   | 3.8   | 5.35  | 7.1  |
| 15               | 0.17   | 0.32  | 0.53  | 0.79  | 1.15  | 1.85  | 2.75  | 3.7   | 4.95 |
| 25               | 0.13   | 0.24  | 0.38  | 0.54  | 0.74  | 1.3   | 1.8   | 2.5   | 3.2  |
| 40               | 0.089  | 0.18  | 0.29  | 0.415 | 0.57  | 0.895 | 1.35  | 1.85  | 2.3  |
| 80               | 0.051  | 0.12  | 0.19  | 0.285 | 0.38  | 0.63  | 0.91  | 1.25  | 1.55 |
| 120              | 0.035  | 0.078 | 0.145 | 0.22  | 0.295 | 0.505 | 0.74  | 0.95  | 1.35 |
| 180              | 0.023  | 0.056 | 0.095 | 0.16  | 0.255 | 0.38  | 0.685 | 0.795 | 1.05 |
| 300              | 0.0079 | 0.031 | 0.062 | 0.095 | 0.15  | 0.265 | 0.395 | 0.56  | 0.75 |

Tabelle 9: Parameter  $\alpha\epsilon^{2/3}$  für ein Windfeld über dem Meer



| $z \backslash U$ | 10   | 15   | 20   | 25   | 30   | 40   | 50   | 60   | 70   |
|------------------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| 5                | 4.55 | 4.55 | 4.55 | 4.55 | 4.55 | 4.55 | 4.55 | 4.55 | 4.55 |
| 10               | 4.55 | 4.55 | 4.55 | 4.55 | 4.55 | 4.55 | 4.55 | 4.55 | 4.55 |
| 15               | 4.55 | 4.55 | 4.55 | 4.55 | 4.55 | 4.55 | 4.55 | 4.55 | 4.55 |
| 25               | 4.5  | 4.55 | 4.55 | 4.55 | 4.55 | 4.55 | 4.55 | 4.55 | 4.55 |
| 40               | 4.46 | 4.53 | 4.55 | 4.55 | 4.55 | 4.55 | 4.55 | 4.55 | 4.55 |
| 80               | 4.25 | 4.4  | 4.48 | 4.49 | 4.5  | 4.51 | 4.52 | 4.53 | 4.53 |
| 120              | 3.85 | 4.25 | 4.4  | 4.45 | 4.48 | 4.5  | 4.51 | 4.51 | 4.52 |
| 180              | 2.88 | 3.81 | 4.17 | 4.32 | 4.38 | 4.4  | 4.47 | 4.48 | 4.5  |
| 300              | 0    | 2.15 | 3.05 | 3.6  | 3.95 | 4.23 | 4.3  | 4.4  | 4.45 |

Tabelle 10: Parameter  $\hat{\Gamma}$  für ein Windfeld über dem Meer

## C.2 Wertetabellen für Windfelder über Land

| $z \backslash U$ | 10   | 15   | 20   | 25   | 30   | 40   | 50   | 60   | 70   |
|------------------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| 5                | 13.5 | 16   | 16   | 15.5 | 14.5 | 12.5 | 10   | 8.75 | 7.5  |
| 10               | 14.5 | 22   | 26   | 28   | 28   | 27   | 24.5 | 22.5 | 20   |
| 15               | 14   | 23   | 30   | 35   | 38.5 | 40   | 38.5 | 36   | 34   |
| 25               | 14.5 | 22.5 | 31   | 39   | 47   | 56   | 60   | 60   | 59.5 |
| 40               | 15   | 23   | 31   | 40   | 49   | 65   | 78   | 85   | 89   |
| 80               | 15.5 | 24   | 33   | 42   | 51   | 69   | 88   | 110  | 125  |
| 120              | 18.5 | 25   | 34   | 43   | 53   | 72   | 90   | 112  | 130  |
| 180              | 30   | 30.5 | 36.5 | 44   | 54.5 | 75   | 95   | 118  | 135  |
| 300              | 75   | 54   | 51   | 56   | 60   | 77.5 | 100  | 125  | 140  |

Tabelle 11: Parameter  $L$  für ein Windfeld über dem Land mit  $z_0 = 0.03$

| $z \backslash U$ | 10     | 15    | 20    | 25    | 30    | 40    | 50    | 60   | 70    |
|------------------|--------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|------|-------|
| 5                | 0.0975 | 0.235 | 0.47  | 0.825 | 1.45  | 3.25  | 6.75  | 13.5 | 22.5  |
| 10               | 0.078  | 0.165 | 0.29  | 0.48  | 0.75  | 1.6   | 3.1   | 5.15 | 8.5   |
| 15               | 0.066  | 0.15  | 0.245 | 0.375 | 0.65  | 1.2   | 2.05  | 3.45 | 5.3   |
| 25               | 0.049  | 0.115 | 0.195 | 0.295 | 0.425 | 0.8   | 1.4   | 2.15 | 3.2   |
| 40               | 0.035  | 0.085 | 0.17  | 0.255 | 0.36  | 0.62  | 0.985 | 1.55 | 2.2   |
| 80               | 0.02   | 0.05  | 0.1   | 0.165 | 0.25  | 0.55  | 0.71  | 1.05 | 1.45  |
| 120              | 0.014  | 0.036 | 0.07  | 0.12  | 0.18  | 0.35  | 0.575 | 0.85 | 1.25  |
| 180              | 0.007  | 0.024 | 0.05  | 0.085 | 0.14  | 0.26  | 0.425 | 0.65 | 0.91  |
| 300              | 0.003  | 0.01  | 0.029 | 0.053 | 0.086 | 0.175 | 0.29  | 0.44 | 0.625 |

Tabelle 12: Parameter  $\alpha\epsilon^{2/3}$  für ein Windfeld über dem Land mit  $z_0 = 0.03$ 

| $z \backslash U$ | 10   | 15   | 20   | 25   | 30   | 40   | 50   | 60   | 70   |
|------------------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| 5                | 4.55 | 4.55 | 4.55 | 4.55 | 4.55 | 4.55 | 4.55 | 4.55 | 4.55 |
| 10               | 4.55 | 4.55 | 4.55 | 4.55 | 4.55 | 4.55 | 4.55 | 4.55 | 4.55 |
| 15               | 4.53 | 4.55 | 4.55 | 4.55 | 4.55 | 4.55 | 4.55 | 4.55 | 4.55 |
| 25               | 4.5  | 4.52 | 4.54 | 4.55 | 4.55 | 4.55 | 4.55 | 4.55 | 4.55 |
| 40               | 4.37 | 4.45 | 4.5  | 4.52 | 4.53 | 4.53 | 4.54 | 4.54 | 4.54 |
| 80               | 3.8  | 4.23 | 4.45 | 4.48 | 4.5  | 4.51 | 4.52 | 4.52 | 4.53 |
| 120              | 2.85 | 3.85 | 4.17 | 4.38 | 4.42 | 4.48 | 4.5  | 4.51 | 4.52 |
| 180              | 1.3  | 2.9  | 3.65 | 4.1  | 4.2  | 4.4  | 4.45 | 4.48 | 4.51 |
| 300              | 0    | 1    | 2.4  | 2.97 | 3.55 | 4.1  | 4.22 | 4.35 | 4.5  |

Tabelle 13: Parameter  $\hat{\Gamma}$  für ein Windfeld über dem Land mit  $z_0 = 0.03$

## Literatur

- [1] Mann, J.: *Wind field simulation. Prob. Engng. Mech.*, Vol. 13, No.4, pp. 269-282, 1998.
- [2] Mann, J.: *The spatial structure of neutral atmospheric surface-layer turbulence. J. Fluid Mech.*, Vol. 273, pp. 141-168, 1994.
- [3] von Kármán, T.: *Progress in the statistical theory of turbulence. Proc. Natl Acad. Sci.*, Vol. 34, pp. 530-539, 1948.
- [4] Shinozuka, M.; Jan, C.-M.: *Digital simulation of random processes and its applications. J. of Sound and Vibration*, Vol. 25, No. 1, pp. 111-128, 1972.
- [5] Batchelor, G. K.: *The theory of homogeneous turbulence*. Cambridge University Press, Cambridge, 1953.
- [6] Townsend, A. A.: *The structure of turbulent shear flow*. Cambridge University Press, Cambridge, 1976.
- [7] Kaimal, J. C.; Wyngaard, J. C.; Izumi, Y.; Coté, O. R.: *Spectral characteristics of surface-layer turbulence. Quart. J. R. Met. Soc.*, Vol. 98, pp. 563-589, 1972.
- [8] Kemmerer, T.: *Implementierung und Vergleich von 3D-FFT-Algorithmen*. (Diplomarbeit) Fachhochschule Frankfurt a.M., 1999.
- [9] Cooley, J. W.; Tukey, J. W.: *An algorithm for the machine calculation of complex fourier series. Math. of Computation*, Vol. 19, No. 90, pp. 297-301, 1965.
- [10] Todorovic, P.: *An Introduction to Stochastic Processes and Their Application*. Springer-Verlag, New York, 1992.
- [11] Beichelt, F. E.; Montgomery, D. C.: *Taschenbuch der Stochastik*. Teubner-Verlag, Wiesbaden, 2003.
- [12] Fefferman, C. L.: *Existence and Smoothness of the Navier-Stokes Equation*. Princeton University, Princeton, 2000.
- [13] Cramér, H.: *Über eine Eigenschaft der normalen Verteilungsfunktion. Mathe. Zeitschrift*, Vol. 41, pp. 405-414, 1936.

- [14] Veers, P. S.: *Modeling Stochastic Wind Loads on Vertical Axis Wind Turbines. Sandia Report*, Albuquerque, 1984.
- [15] Veers, P. S.: *Three-Dimensional Wind Simulation. Sandia Report*, Albuquerque, 1988.
- [16] Homicz, G. F.: *Numerical Simulation of VAWT Stochastic Aerodynamic Loads Produced by Atmospheric Turbulence: VAWT-SAL Code. Sandia Report*, Albuquerque, 1991.
- [17] Hanneschläger, G.: *HOSA - Higher Order Spectra Analysis*. 2004.
- [18] Brigham, E. O.: *FFT: Schnelle Fourier-Transformation*. R. Oldenbourg Verlag, München, 1992.
- [19] Nussbaumer, H. J.: *Fast Fourier Transform and Convolution Algorithms*. Springer-Verlag, New York, 1982.
- [20] Tiehl, S.: *Diskrete Fourier-Transformation*. Universität Koblenz-Landau, 2005.
- [21] von der Lühe, O.: *Fourier-Transformation in einer und mehreren Dimensionen*. Albert-Ludwig-Universität, Freiburg i. B., 2001.
- [22] Bernert, C.: *Partielle Differentialgleichungen*. Hochschule Mittweida, 2007.
- [23] Bernert, C.: *Numerik der Partiellen Differentialgleichungen*. Hochschule Mittweida, 2007.
- [24] Wendemuth, A.: *Grundlagen der stochastischen Sprachverarbeitung*. R. Oldenbourg Verlag, München, 2004.
- [25] März, M.: *Modellierung von Wasserwellen für die Berechnung von wellen- und strömungsinduzierter Lasten an Fundamenten von Offshore-Windkraftanlagen*. (Diplomarbeit) Hochschule Mittweida, 2003.
- [26] Bauer, H.: *Wahrscheinlichkeitstheorie und Grundzüge der Maßtheorie*. DeGruyter-Verlag, Berlin, 1991.
- [27] Bronstein, I. N.; Semendjajew, K. A.; Musiol, G.; Mühlig, H.: *Taschenbuch der Mathematik*. Verlag Harri Deutsch, Frankfurt a.M., 2006.

- [28] Bartsch, H.-J.: *Taschenbuch Mathematischer Formeln*. Fachbuchverlag Leipzig, Leipzig, 2004.
- [29] [www.cfd-online.com](http://www.cfd-online.com) (*Computational Fluid Dynamics*)



## **Erklärung**

Hiermit versichere ich, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt habe.

Chemnitz, 24. August 2009